

А.Х. Шахмейстер

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА



Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Иррациональные уравнения и неравенства

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ПЕТРОПЛИФ *ИЦНМО*

С.-Петербург
Москва
2011

УДК 373.167.1:512

ББК 22.141я71.6

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
Заслуженный учитель РФ Т. И. Курсип,
Заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Рекомендовано

Московским институтом открытого образования (МИОО)
и Московским центром непрерывного математического
образования (МЦНМО) в качестве пособия для
школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А. Х.

Ш 32 Иррациональные уравнения и неравенства. — 4-е издание —
СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство
МЦНМО 2011. — 216 с.: илл. — ISBN 978-5-98712-024-8,
ISBN 978-5-91281-052-7, ISBN 978-5-94057-795-9.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного
курса математики, содержит большое количество разноуровневого
тренировочного материала. В книге представлена программа для про-
ведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах.
Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, сту-
дентов, преподавателей.

ISBN 978-5-94057-795-9 (Издательство МЦНМО)

ISBN 978-5-98712-024-8 (ООО «Петроглиф»)

ISBN 978-5-91281-052-7 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512

ББК 22.141я71.6

© Шахмейстер А. Х., 2011

© Куликов Ю. Н., обложка, 2011

© ООО «Петроглиф», 2011

*Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:*

*Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Владимира Леонидовича Ильина*

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

**Программа элективного курса для учащихся 9-11 классов
(25 уроков).**

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 4	Иррациональные уравнения (стр. 5–44) Практикум 1. Тренировочная работа 1 (2, 5, 7, 12, 13). Практикум 2. Тренировочная работа 2 (1, 5, 7, 10, 24).
5 – 8	Примеры нестандартных способов решения иррациональных уравнений (стр. 46–77) Практикум 3. Тренировочная работа 3 (1, 2, 5, 12, 17).
9 – 11	Иррациональные неравенства (стр. 78–94) Практикум 4. Тренировочная работа 4 (2, 3, 7, 9, 12).
12 – 16	Примеры решения более сложных иррациональных неравенств (стр. 95–130) Практикум 5. Тренировочная работа 5 (1, 3, 4, 7, 8, 14, 17 (рассмотреть также способ подстановки), 20).
17 – 20	Системы иррациональных неравенств (стр. 131–150) Практикум 6. Тренировочная работа 6 (3, 7, 10).
21 – 25	Обобщение опыта решения иррациональных уравнений и неравенств (стр. 151–210) Тренировочная карточка 1 (2, 4). Тренировочная карточка 2 (1, 2, 3, 4). Тренировочная карточка 3 (2, 5). Тренировочная карточка 4 (2, 3, 4). Тренировочная карточка 5 (4, 5). Тренировочная карточка 6 (1, 2, 4, 5). Можно взять часть зачетных карточек.

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике
заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Иррациональные уравнения

Введение

К сожалению, корректного определения иррационального уравнения нет. Хотя ясно, что в иррациональном уравнении мы имеем дело с корнями n -й степени ($n \geq 2$).

В этом разделе мы будем рассматривать различные уравнения, содержащие корни, и анализировать различные подходы к их решению.

Примеры решения простейших иррациональных уравнений

Практикум 1

В этом разделе мы рассмотрим приемы решения типовых иррациональных уравнений.

1. $\sqrt{x-13} - \sqrt{10-x} = 2$.

Найдем область определения уравнения, которую будем обозначать $D(Y)$: подкоренные выражения должны быть больше или равны нулю.

Полученная система не имеет решения, значит, исходное уравнение не определено.

Ответ: решений нет.

$$D(Y): \begin{cases} x - 13 \geq 0; \\ 10 - x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 13; \\ x \leq 10; \end{cases}$$

$$D(Y) \doteq \emptyset.$$

2. $\sqrt{3-x} = x-3$.

Необходимо учесть, что при решении рассматривается только арифметический корень. Поэтому должно выполняться условие $x-3 \geq 0$.

С учетом $D(y)$ получим систему

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}; \quad x=3.$$

После проверки ясно, что $x=3$ — корень уравнения.

Но можно решать это уравнение на уровне равносильности, используя свойство: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}$.

Тогда имеем:

$$\sqrt{3-x} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3-x = (x-3)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ (x-3)(x-3+1) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x=3; \\ x=2 \end{cases} \end{cases}; \quad x=3.$$

Ответ: $x=3$.

3. $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1-x$.

Левая часть уравнения неотрицательна, поэтому должно выполняться неравенство $1-x \geq 0$.

Составим систему условий (неравенств):

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad \emptyset.$$

Полученная система неравенств не имеет решения.

Ответ: решений нет.

4. $\sqrt{x+2} = x$.

Так как $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$D(y): 3-x \geq 0.$$

$$D(y) = (-\infty; 3].$$

$$D(y): \begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}.$$

$$D(y) = [2; \infty).$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 2$.

5. $\sqrt{x+3} = -x-4$.

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -x-4 \geq 0 \\ x+3 = (-x-4)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq -4 \\ x^2 + 8x + 16 = x+3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ x^2 + 7x + 13 = 0 \end{cases}.$$

У входящего в систему квадратного уравнения дискриминант $D = 7^2 - 52 < 0$, следовательно, действительных корней оно не имеет.

Примечание. Можно сразу заметить, что решений нет, если рассмотреть $D(y)$ исходного уравнения и $E(y)$. $E(y)$ — область изменения функции, стоящей в левой части уравнения.

В данном случае $y = \sqrt{x+3}$, $E(y) = [0; \infty)$.

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ -x-4 \geq 0 \end{cases}.$$

Ответ: решений нет.

6. $\sqrt{5x+6} = -x$.

Так как $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 = 5x+6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x = 6 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $x = -1$.

Замечание. В ходе неравносильных преобразований возможно появление посторонних решений, тогда нужно производить отбор полученных решений проверкой, т. е. подстановкой их в исходное уравнение.

$$7. \sqrt{3x-2} = 3 - \sqrt{x-1}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат (неравносильное преобразование):

$$3x - 2 = 9 - 6\sqrt{x-1} + x - 1; \quad 6\sqrt{x-1} = 10 - 2x;$$

$$3\sqrt{x-1} = 5 - x; \quad 9(x-1) = 25 - 10x + x^2;$$

$$x^2 - 19x + 34 = 0; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 17. \end{cases}$$

Так как при решении были использованы неравносильные преобразования, то нужна проверка.

Проверка.

$$1. x = 2.$$

$$\sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 3 - \sqrt{2 - 1}; \quad \sqrt{4} = 3 - 1; \quad 2 = 2 \text{ — истина.}$$

$$2. x = 17.$$

$$\sqrt{3 \cdot 17 - 2} = 3 - \sqrt{17 - 1}; \quad \sqrt{49} = 3 - 4; \quad 7 = -1 \text{ — ложь.}$$

Ответ: $x = 2$.

$$8. \frac{2x-6}{\sqrt{5-x}} + \sqrt{5-x} = 3\sqrt{x-3}.$$

Выполним необходимые преобразования, а затем проверим:

$$2x - 6 + (\sqrt{5-x})^2 = 3\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{5-x};$$

$$2x - 6 + 5 - x = 3\sqrt{-x^2 + 8x - 15}; \quad x - 1 = 3\sqrt{-x^2 + 8x - 15};$$

$$x^2 - 2x + 1 = 9(-x^2 + 8x - 15); \quad 10x^2 - 74x + 136 = 0;$$

$$5x^2 - 37x + 68 = 0; \quad \left| x_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 1360}}{10} = \frac{37 \pm 3}{10}; \right.$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 3,4. \end{cases}$$

Проверка.

$$1. x = 4.$$

$$\frac{2 \cdot 4 - 6}{\sqrt{5-4}} + \sqrt{5-4} = 3\sqrt{4-3}; \quad 2 + 1 = 3 \cdot 1 \text{ — истина.}$$

$$2. x = 3, 4.$$

$$\frac{6,8-6}{\sqrt{1,6}} + \sqrt{1,6} = 3\sqrt{0,4}.$$

Умножим обе части на $\sqrt{1,6}$:

$$0,8 + 1,6 = 3\sqrt{0,64}; \quad 2,4 = 3 \cdot 0,8 \text{ — истина.}$$

Ответ: $\{4; 3,4\}$.

$$9. \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-5}.$$

$$D(Y): x \geq 2.$$

$$D(Y) = [2; \infty).$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x-2 + 2\sqrt{x^2-3x+2} + x-1 = 3x-5;$$

$$2\sqrt{x^2-3x+2} = x-2$$

$$4(x^2-3x+2) = x^2-4x+4; \quad 3x^2-8x+4=0.$$

Напомним, что для квадратного уравнения $nx^2 + 2kx + m = 0$ (с четным коэффициентом при x) корни определяются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - mn}}{n}.$$

В нашем случае

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{8} = \frac{4 \pm 2}{8}; \quad \begin{cases} x = 2 \in D(Y) \\ x = \frac{2}{8} \notin D(Y) \end{cases}$$

Проверка. $x = 2$.

$$\sqrt{2-2} + \sqrt{2-1} = \sqrt{3 \cdot 2 - 5}; \quad 0 + 1 = 1 \text{ — истина.}$$

Ответ: $x = 2$.

$$10. \sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x-1.$$

Так как $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1+x\sqrt{x^2-24} = x^2-2x+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x(\sqrt{x^2-24} - (x-2)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2 - 24} = x - 2 \end{cases} \end{cases}; \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 = x^2 - 24 \end{cases} \end{cases}; \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 7 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 7$.

11. $\sqrt{x^2 + 12x + 36} = x^2 - 36$.

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении, правую часть уравнения разложим на множители:

$$\sqrt{(x+6)^2} = (x-6)(x+6); \quad |x+6| = (x-6)(x+6);$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq -6 \\ (x+6) - (x+6)(x-6) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -6 \\ -(x+6) - (x+6)(x-6) = 0 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} x \geq -6 \\ (x+6)(1-x+6) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -6 \\ -(x+6)(1+x-6) = 0 \end{cases} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq -6 \\ \begin{cases} x = -6 \\ x = 7 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -6 \\ \begin{cases} x = -6 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ x = 7 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-6; 7\}$.

12. $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x - 7 = 0.$$

Положим $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = t$, $t \geq 0$.

Тогда $x^2 - 3x + 5 = t^2$, а $x^2 - 3x - 7 = t^2 - 12$.

Исходное уравнение примет вид $t^2 + t - 12 = 0$.

Из двух его решений лишь одно попадает в область задания t ($t \geq 0$):

$$\begin{cases} t = -4 \notin [0, \infty) \\ t = 3 \end{cases}.$$

Зная, чему равно t , решаем уравнение относительно x :

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3; \quad x^2 - 3x + 5 = 9; \quad x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Решение, найденное таким способом, дополнительной проверки не требует.

Этот способ решения называется *подстановкой*.

Ответ: $\{-1; 4\}$.

$$13. (16 - x^2)\sqrt{3 + x} = 0.$$

Равносильная система имеет вид

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 16 - x^2 = 0; \\ 3 + x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ x = 4 \\ x = -4 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-3; 4\}$.

$$14. \frac{8}{\sqrt{10-x}} - \sqrt{10-x} = 2.$$

$$D(Y): 10 - x > 0.$$

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{10-x}$. Дополнив полученное уравнение требованиями $D(y)$, составим систему:

$$\begin{cases} 8 - (\sqrt{10-x})^2 = 2\sqrt{10-x} \\ 10 - x > 0 \end{cases}$$

и решим ее:

$$\begin{cases} 8 - 10 + x = 2\sqrt{10-x} \\ x < 10 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 2 = 2\sqrt{10-x} \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 10 \\ x^2 - 4x + 4 = 40 - 4x \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \leq x < 10 \\ x^2 = 6^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \leq x < 10 \\ x = 6 \\ x = -6 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 6$.

$$15. \sqrt{|x-5|} = x-3.$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ |x-5| = (x-3)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x \geq 5, \text{ тогда } |x-5| = x-5 \\ x-5 = x^2 - 6x + 9 \\ x < 5, \text{ тогда } |x-5| = 5-x \\ 5-x = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 5 \\ x^2 - 7x + 14 = 0 \quad (D < 0 \text{ — решений нет}), \\ x \geq 3 \\ x < 5 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x < 5; \quad x = 4. \\ \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Существует другой способ решения системы:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ |x-5| = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (|x-5|)^2 = (x-3)^4 \end{cases}.$$

Так как $|a|^2 = a^2$, имеем

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ ((x-3)^2 + x-5)((x-3)^2 - x+5) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 7x + 14) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x^2 - 7x + 14 = 0 \text{ — решений нет} \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 4; \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \quad x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

Тренировочная работа 1

Решите уравнения 1–15.

1. $\sqrt{3 + \sqrt{x-1}} = 1.$

2. $\sqrt{5x-6} = -x.$

3. $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = 2.$

4. $2\sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{3x+1}.$

5. $\sqrt{4x^2 - \sqrt{x-1}} = 4 - 2x.$

6. $x = 1 - \sqrt{1 - x\sqrt{16 + x^2}}.$

7. $\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x - 3} = x + 1.$

8. $\sqrt{\frac{x-3}{2}} + \sqrt{2x} = \sqrt{x+3}.$

9. $\sqrt{4 - 2\sqrt{x^2 - 1}} = 2x.$

10. $2x^2 - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3x + 3 = 0.$

11. $\frac{3}{\sqrt{3-x}+1} + 2\sqrt{3-x} = 5.$

12. $\sqrt{|x-8|} = x-2.$

13. $(9-x^2)\sqrt{2+x} = 0.$

14. $\sqrt{1-x-x^2} = x - |x-1|.$

15. $\sqrt{3x-x^2+2} = 4-x.$

Решение тренировочной работы 1

$$1. \sqrt{3 + \sqrt{x-1}} = 1; \quad 3 + \sqrt{x-1} = 1; \quad \sqrt{x-1} = -2.$$

Отметим, что $-2 \notin [0, \infty)$.

Ответ: решений нет.

$$2. \sqrt{5x-6} = -x.$$

Составим систему, равносильную данному уравнению, и решим ее:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 5x - 6 = (-x)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \quad \emptyset.$$

Ответ: решений нет.

$$3. \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = 2. \quad D(y): \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases}; \quad x = 3.$$

Проверим подстановкой, является ли $x = 3$ решением:

$$\sqrt{3-3} + \sqrt{3-3} = 2; \quad 0 + 0 = 2 \text{ — ложь.}$$

Ответ: решений нет.

$$4. 2\sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{3x+1}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$4(x-1) + 8\sqrt{x-1} + 4 = 3x+1; \quad 8\sqrt{x-1} = 1-x;$$

$$64(x-1) = (1-x)^2.$$

$$\text{Учтем, что } (x-1)^2 = (1-x)^2.$$

$$(x-1)(64-x+1) = 0; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 65 \end{cases}.$$

Проверка.

$$1. \quad x = 1.$$

$$2\sqrt{1-1} + 2 = \sqrt{3 \cdot 1 + 1}; \quad 2 = 2 \text{ — истина.}$$

$$2. \quad x = 65.$$

$$2\sqrt{65-1} + 2 = \sqrt{65 \cdot 3 + 1}; \quad 2 \cdot 8 + 2 = \sqrt{196};$$

$$18 = 14 \text{ — ложь.}$$

Ответ: $x = 1$.

$$5. \sqrt{4x^2 - \sqrt{x-1}} = 4 - 2x.$$

Составим систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} 4 - 2x \geq 0 \\ 4x^2 - \sqrt{x-1} = (4 - 2x)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ 4x^2 - \sqrt{x-1} = 16 - 16x + 4x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(x-1) = \sqrt{x-1} \\ x \leq 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \\ 256(x-1)^2 = x-1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \\ x-1 = 0 \\ x-1 = \frac{1}{256} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \geq x \geq 1 \\ x = 1 \\ x = 1 + \frac{1}{256} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{1; 1\frac{1}{256}\right\}$.

$$6. x = 1 - \sqrt{1 - x\sqrt{16 + x^2}}.$$

$$\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 + 16}} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 - x\sqrt{x^2 + 16} = x^2 - 2x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x\sqrt{x^2 + 16} - 2x + x^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + 16} = 2 - x; \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 + 16 = 4 - 4x + x^2; \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x \leq 2 \\ x = -3; \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Ответ: $\{0; -3\}$.

$$7. \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x - 3} = x + 1.$$

Возведение в нечетную степень не нарушает равносильности.

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = (x + 1)^3;$$

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1; \quad x^2 = 4; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{2; -2\}$.

$$8. \sqrt{\frac{x-3}{2}} + \sqrt{2x} = \sqrt{x+3}.$$

$$D(y): \begin{cases} \frac{x-3}{2} \geq 0 \\ 2x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}; D(y) = [3; \infty).$$

Рассмотрим комбинированный способ:

$$\frac{x-3}{2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{x-3}{2}} \cdot \sqrt{2x} + 2x = x+3;$$

$$x-3 + 4\sqrt{(x-3)x} + 4x = 2x+6;$$

$$4\sqrt{x(x-3)} = 9-3x;$$

$$16x(x-3) = 3^2(3-x)^2;$$

$$(x-3)(16x-9x+27) = 0; \begin{cases} x = 3 \\ x = -3\frac{6}{7} \end{cases}.$$

Проверка. Решение $-3\frac{6}{7} \notin [3; \infty)$.

Остается проверить решение $x = 3$:

$$\sqrt{\frac{3-3}{2}} + \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{3+3}, \quad 0 + \sqrt{6} = \sqrt{6} \text{ — истина.}$$

Ответ: $x = 3$.

$$9. \sqrt{4-2\sqrt{x^2-1}} = 2x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 4-2\sqrt{x^2-1} = 4x^2 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ 2(1-x^2) = \sqrt{x^2-1} \end{cases}.$$

С учетом требований к арифметическому корню и подкоренному выражению составим систему:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

Этим требованиям удовлетворяет лишь $x = 1$.

Проверка. Подставим $x = 1$ в уравнение:

$$\sqrt{4-2\sqrt{1-1}} = 2 \cdot 1; \quad 2 = 2 \text{ — истина.}$$

Ответ: $x = 1$.

10. $2x^2 - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3x + 3 = 0$.

Используем подстановку $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = t$, $t \geq 0$.

Тогда $2x^2 + 3x + 9 = t^2$ и $2x^2 + 3x + 3 = t^2 - 6$.

Решим уравнение $t^2 - 5t - 6 = 0$:

$$\begin{cases} t = 6 \\ t = -1 \notin [0; \infty) \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получим:

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9 = 36;$$

$$2x^2 + 3x - 27 = 0; \begin{cases} x = 3 \\ x = -4,5 \end{cases}$$

Ответ: $\{-4,5; 3\}$.

11. $\frac{3}{\sqrt{3-x+1}} + 2\sqrt{3-x} = 5$. $D(y): 3-x \geq 0$. $D(y) = (-\infty; 3]$.

$$3 + 2\sqrt{3-x}(\sqrt{3-x} + 1) = 5(\sqrt{3-x} + 1);$$

$$3 + 2(3-x) + 2\sqrt{3-x} = 5\sqrt{3-x} + 5; \quad 3\sqrt{3-x} = 4 - 2x.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат — это неравносильный переход:

$$9(3-x) = 16 - 16x + 4x^2; \quad 4x^2 - 16x + 9x - 11 = 0;$$

$$4x^2 - 7x - 11 = 0; \quad \left| x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 176}}{8} = \frac{7 \pm 15}{8}; \right. \begin{cases} x = 2\frac{3}{4} \\ x = -1 \end{cases}$$

Проверить истинность найденных решений подстановкой технически очень сложно, поэтому выясним, при каких условиях вышеупомянутый переход равносильен.

Нужно, чтобы выполнялось условие $4 - 2x \geq 0$,

т.е. $x \leq 2$. Этому требованию удовлетворяет лишь

$x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Примечание. Возможен другой путь решения с использованием подстановки $\sqrt{3-x} = t$, где $t > 0$.

12. $\sqrt{|x-8|} = x-2$.

В ходе решения используем свойство $|a|^2 = a^2$.

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ |x-8| = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (|x-8|)^2 = (x-2)^4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ ((x-2)^2 - (x-8))((x-2)^2 + x-8) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 - x + 8 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 + x - 8 = 0; \\ x \geq 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 12 = 0 & (D < 0) \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 4$.

13. $(9-x^2)\sqrt{2+x} = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 9-x^2 = 0; \\ \sqrt{x+2} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 3 \\ x = -3 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-2; 3\}$.

14. $\sqrt{1-x-x^2} = x - |x-1|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 & (|x-1| = x-1) \\ \sqrt{1-x-x^2} = x-x+1 \\ x-1 < 0 & (|x-1| = 1-x) \\ \sqrt{1-x-x^2} = x+x-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{1-x-x^2} = 1 \\ x < 1 \\ \sqrt{1-x-x^2} = 2x-1 \end{cases};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ 1 - x - x^2 = 1 \\ x < 1 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 1 - x - x^2 = 4x^2 - 4x + 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \\ x < 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 5x^2 - 3x = 0 \end{array} \right. \quad \emptyset ; \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ x = 0 \\ x = \frac{3}{5} \end{array} \right. .$$

Ответ: $x = \frac{3}{5}$.

15. $\sqrt{3x - x^2 + 2} = 4 - x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ 3x - x^2 + 2 = (4 - x)^2 \end{cases} ; \begin{cases} x \leq 4 \\ 3x - x^2 + 2 = 16 - 8x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ 2x^2 - 11x + 14 = 0 \end{cases} ; x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} = \frac{11 \pm 3}{4}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x = 3,5 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: {2; 3,5}.

Вывод. Для решения иррациональных уравнений необходимо учесть, что:

а) $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}$;

б) $b\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \cdot b = 0 \end{cases}$;

в) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a = b \end{cases}$;

г) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \\ a + b + 2\sqrt{ab} = c \end{cases}$;

д) $|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a^2 = b^2 \end{cases}$;

е) $|a|^2 = a^2$.

Примеры решения более сложных иррациональных уравнений

Практикум 2

$$1. \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4.$$

Введем подстановку: $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = t > 0$, тогда уравнение примет вид $t + \frac{3}{t} = 4$.

Находим:
$$\begin{cases} t = 3 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 3 \\ \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 1 \end{cases}.$$

Возведем в квадрат обе части каждого из уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3-x}{2+x} = 9 \\ \frac{3-x}{2+x} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3-x = 18+9x \\ 3-x = 2+x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1,5 \\ x = 0,5 \end{cases}.$$

Проверка показывает, что найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\{-1,5; 0,5\}$.

$$2. \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$$

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$\begin{aligned} x+5 + 3(\sqrt[3]{x+5})^2 \cdot \sqrt[3]{x+6} + \\ + 3(\sqrt[3]{x+6})^2 \cdot \sqrt[3]{x+5} + x+6 = 2x+11; \end{aligned}$$

$$3\sqrt[3]{x+5} \cdot \sqrt[3]{x+6} \cdot (\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}) = 0.$$

Решим систему
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+5} = 0 \\ \sqrt[3]{x+6} = 0 \\ \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = 0 \end{cases}.$$

Для решения третьего уравнения ($\sqrt[3]{x+5} = -\sqrt[3]{x+6}$) возведем обе его части в куб.

Получим: $x + 5 = -x - 6$; $2x = -11$.

Запишем решение системы:
$$\begin{cases} x = -5 \\ x = -6 \\ x = -5,5 \end{cases}.$$

Проверка.

1) $x = -5$.

$$\sqrt[3]{-5+5} + \sqrt[3]{-5+6} = \sqrt[3]{2(-5)+11}; \quad 0 + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \text{ — истина.}$$

2) $x = -6$.

$$\sqrt[3]{-6+5} + \sqrt[3]{-6+6} = \sqrt[3]{2(-6)+11}; \quad -\sqrt[3]{1} + 0 = -\sqrt[3]{1} \text{ — истина}$$

3) $x = -5,5$.

$$\sqrt[3]{-5,5+5} + \sqrt[3]{-5,5+6} = \sqrt[3]{2(-5,5)+11};$$

$$\sqrt[3]{-0,5} + \sqrt[3]{0,5} = 0 \text{ — истина.}$$

Ответ: $\{-5; -5,5; -6\}$.

Примечание. Проверка в этом случае не нужна, так как возведение в нечетную степень не нарушает равносильности.

$$3. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$$

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$x+1 + 3\sqrt[3]{(x+1)^2(3x+1)} + 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)^2} + 3x+1 = x-1;$$

$$3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}) = -3(x+1).$$

В условии сказано, что $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$,

поэтому заменим $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$ на $\sqrt[3]{x-1}$:

$$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)} \cdot \sqrt[3]{x-1} = -(x+1).$$

Возведем еще раз обе части уравнения в третью степень

$$(x+1)(3x+1)(x-1) = -(x+1)^3;$$

$$(x+1)((x-1)(3x+1) + (x+1)^2) = 0.$$

После преобразований получим

$$(x+1)4x^2 = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Проверка:

1) $x = -1$.

$$\sqrt[3]{-1+1} + \sqrt[3]{3(-1)+1} = \sqrt[3]{-1-1}; \quad 0 + \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{-2} \text{ — истина.}$$

2) $x = 0$.

$$\sqrt[3]{0+1} + \sqrt[3]{3 \cdot 0+1} = \sqrt[3]{0-1}; \quad 1+1 = -1 \text{ — ложь.}$$

Ответ: $x = -1$.

Примечание. $x = 0$ не является корнем уравнения. Почему? Разве мы делали неравносильные преобразования? Да, так как при решении уравнения мы заменили левую часть уравнения $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$ на не равную ей *тождественно* правую часть $\sqrt[3]{x-1}$ (нам дано уравнение, а не тождество). В таких случаях проверка обязательна!

4. $\sqrt{6-x-x^2} - \sqrt{x^2+x-1} = 1.$

Введем подстановку: $\sqrt{x^2+x-1} = t \geq 0$, тогда

$$x^2+x-1=t^2; \quad -x^2-x+1=-t^2; \quad -x^2-x+6=-t^2+5.$$

Исходное уравнение примет вид $\sqrt{5-t^2} = 1+t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 5-t^2 = t^2+2t+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2+t-2=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} t=-2 \\ t=1 \\ t \geq 0 \end{cases}; \quad t=1.$$

Возвращаемся к переменной x :

$$\sqrt{x^2+x-1}=1; \quad \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-2; 1\}$.

5. $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} - \sqrt{x-2} = 1.$

Введем подстановку: $\sqrt{x-2} = t \geq 0$, тогда $x-2=t^2$;
 $x=t^2+2$; $x-3=t^2-1$.

Уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2-2+t} - \sqrt{t^2-1-t} = 1; \quad \sqrt{t^2-2+t} = 1 + \sqrt{t^2-1-t}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$t^2 - 2 + t = 1 + 2\sqrt{t^2 - 1 - t} + t^2 - 1 - t; \quad t - 1 = \sqrt{t^2 - t - 1}.$$

Возведя в квадрат обе части уравнения еще раз, получим

$$t^2 - 2t + 1 = t^2 - t - 1; \quad t = 2.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем $\sqrt{x-2} = 2$, т.е. $x = 6$.

Проверка показывает, что $x = 6$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 6$.

6. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x+1.$

Выполним подстановку: $\sqrt{x-1} = t \geq 0$. Получаем:

$$x-1 = t^2; \quad x = t^2 + 1; \quad x+1 = t^2 + 2.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 2t + 1} = t^2 + 2; \quad \sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(t-1)^2} = t^2 + 2.$$

Извлечем квадратные корни. Получим

$$|t+1| + |t-1| = t^2 + 2; \quad t+1 + |t-1| = t^2 + 2;$$

$$|t-1| = t^2 - t + 1.$$

Заметим, что $t^2 - t + 1 > 0$ при любом значении t , так как $a = 1 > 0$ и $D < 0$, т.е. графиком функции $\varphi(t) = t^2 - t + 1$ является парабола, расположенная выше оси абсцисс и не имеющая с ней точек пересечения.

$(|t-1|)^2 = (t^2 - t + 1)^2$, так как $|a|^2 = a^2$ по определению.

Используя формулу сокращенного умножения $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, получаем

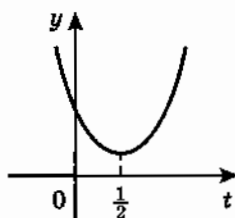
$$(t^2 - t + 1 + t - 1)(t^2 - t + 1 - t + 1) = 0; \quad t^2(t^2 - 2t + 2) = 0;$$

$$\begin{cases} t^2 = 0 \\ t^2 - 2t + 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} t = 0 \\ (t-1)^2 + 1 = 0 \end{cases}; \quad t = 0.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{x-1} = 0; \quad x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.



$$7. \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} + 6x = 11 + x^2.$$

Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11 \text{ на } [2; 4].$$

Заметим, что $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 > 0$ при любом x .

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x-2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} + 4-x = (x^2 - 6x + 11)^2.$$

С учетом $D(y)$ получим

$$\begin{cases} 2 + 2\sqrt{-x^2 + 6x - 8} = (x^2 - 6x + 11)^2 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Введем подстановку: $x^2 - 6x + 11 = t > 0$, тогда

$$-x^2 + 6x - 11 = -t; \quad -x^2 + 6x - 8 = -t + 3.$$

Уравнение примет вид

$$2\sqrt{3-t} = t^2 - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2 \geq 0 \\ 4(3-t) = t^4 - 4t^2 + 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 \geq 2 \\ t^4 - 4t^2 + 4t - 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 \geq 2 \\ t^2(t^2 - 4) + 4(t - 2) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 \geq 2 \\ (t-2)(t^2(t+2)+4) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 \geq 2 \\ (t-2)(t^3 + 2t^2 + 4) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 \geq 2 \\ \begin{cases} t-2 = 0 \\ t^3 + 2t^2 + 4 = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Последнее уравнение корней не имеет,

так как $t^3 + 2t^2 + 4 > 0$ при $t > 0$.

$$\text{Получим систему } \begin{cases} t^2 \geq 2 \\ t = 2 \end{cases}; \quad t = 2.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 11 = 2; \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 3$.

$$\begin{aligned} D(y): \quad & \begin{cases} x-2 \geq 0; \\ 4-x \geq 0; \end{cases} \\ D(y) = & [2; 4]. \end{aligned}$$

$$8. z + \frac{1}{8} = \sqrt[3]{z^2}.$$

Введем подстановку $\sqrt[3]{z} = t$, $\sqrt[3]{z^2} = t^2$, $z = t^3$.

Уравнение примет вид $t^3 + \frac{1}{8} = t^2$ или $8t^3 - 8t^2 + 1 = 0$.

Видно, что целых корней нет.

Проверим наличие рациональных корней.

Пусть $t = \frac{1}{a}$, тогда $\frac{8}{a^3} - \frac{8}{a^2} + 1 = 0$ или $a^3 - 8a + 8 = 0$.

Если целые корни есть, то они — делители числа 8.

Введем функцию $\varphi(a) = a^3 - 8a + 8$. Заметим,

что $\varphi(2) = 2^3 - 8 \cdot 2 + 8 = 0$, т. е. $\varphi(a)$ кратно $(a - 2)$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r} a^3 - 8a + 8 \\ \underline{a^3 - 2a^2} \\ 2a^2 - 8a \\ \underline{2a^2 - 4a} \\ -4a + 8 \\ \underline{-4a + 8} \end{array} \quad \begin{array}{r} a - 2 \\ \underline{a^2 + 2a - 4} \end{array}$$

Уравнение $a^2 + 2a - 4 = 0$ имеет корни $a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$.

$$\text{Получаем: } \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 + \sqrt{5} \\ a = -1 - \sqrt{5} \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{-1 + \sqrt{5}} \\ t = \frac{1}{-1 - \sqrt{5}} \end{cases}; \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \\ t = -\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \end{cases}.$$

Возвращаясь к исходному уравнению, имеем:

$$\text{а) } \sqrt[3]{z} = \frac{1}{2}; \quad z_1 = \frac{1}{8}.$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{z} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}; \quad z_2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5} + 3(\sqrt{5})^2 + 3\sqrt{5} + 1}{64} = \frac{\sqrt{5} + 2}{8}.$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{z} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}; \quad z_3 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^3 = \frac{1 - 3\sqrt{5} + 3(\sqrt{5})^2 - 5\sqrt{5}}{64} = \frac{2 - \sqrt{5}}{8}.$$

Проверку делать не нужна, так как в процессе решения были использованы лишь равносильные преобразования.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{8}; \frac{\sqrt{5} + 2}{8}; \frac{2 - \sqrt{5}}{8} \right\}.$$

$$9. (x + \sqrt{x^2 - 1})^5 (x - \sqrt{x^2 - 1})^3 = 1.$$

Запишем исходное уравнение в виде

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 (x + \sqrt{x^2 - 1})^3 (x - \sqrt{x^2 - 1})^3 = 1;$$

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 (x^2 - x^2 + 1)^3 = 1;$$

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} = 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = 1 - x \\ \sqrt{x^2 - 1} = -1 - x \end{cases};$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 - 1 = (1 - x)^2 \\ -1 - x \geq 0 \\ x^2 - 1 = (x + 1)^2 \end{cases}; & \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 \\ x \leq -1 \\ x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases}; & \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 1 \\ x \leq -1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; 1\}$.

$$10. \frac{x}{x+3} - 2\sqrt{1 + \frac{3}{x}} = 3.$$

Введем подстановку: $\sqrt{\frac{x+3}{x}} = t$. Тогда $\frac{x+3}{x} = t^2$.

Исходное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{t^2} - 2t = 3; \quad 2t^3 + 3t^2 - 1 = 0.$$

Введем функцию $\varphi(t) = 2t^3 + 3t^2 - 1 = 0$.

Отметим, что $\varphi(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 0$,

т. е. $\varphi(t)$ кратно $(t + 1)$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 + 3t^2 - 1 & t + 1 \\ \underline{2t^3 + 2t^2} & 2t^2 + t - 1 \\ t^2 - 1 & \\ \underline{t^2 + t} & \\ -t - 1 & \\ \underline{-t - 1} & \end{array} \quad \begin{cases} 2t^2 + t - 1 = 0 \\ t = -1 \notin (0; \infty) \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Тогда $\sqrt{\frac{x+3}{x}} = \frac{1}{2}$, значит $x = -4$.

Ответ: $x = -4$.

$$11. 2\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x(1+2x)}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$4(1+2x) + 4\sqrt{(1+2x)(1-2x)} + 1 - 2x = 1 - 2x + \sqrt{2x(1+2x)};$$

$$*\sqrt{1+2x}(4\sqrt{1+2x} + 4\sqrt{1-2x} - \sqrt{2x}) = 0 \text{ (сужение } D(Y)).$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ 4(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}) = \sqrt{2x} \end{cases}$$

После возведения в квадрат обеих частей второго уравнения имеем:

$$16(1+2x + 2\sqrt{1-4x^2} + 1-2x) = 2x; \quad \sqrt{1-4x^2} = \frac{x}{16} - 1.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$$1 - 4x^2 = \frac{x^2 - 32x + 16^2}{16^2}; \quad 1025x^2 - 32x = 0.$$

$$\begin{cases} x = -0,5 \\ x = 0 \\ x = \frac{32}{1025} \end{cases} \text{ — возможные решения исходного уравнения.}$$

После проверки ясно, что $x_1 = -0,5$ является корнем

исходного уравнения, а $x_2 = 0$ и $x_3 = \frac{32}{1025}$ — нет.

Если учесть, что в процессе нахождения x_2 и x_3 возникало требование: $\frac{x}{16} - 1 \geq 0$, то x_2 и x_3 можно было и не проверять.

Внимание! Так как при решении уравнения была нарушена равносильность, причем впервые в (*) произошло сужение области определения, что может привести к потере корней, то требуются дополнительные исследования.

$$D(Y): \begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \\ 2x(1-2x) \geq 0 \end{cases}, \text{ тогда } D(Y) = \{-0,5\} \cup [0; 0,5]$$

$$D(Y^*): \begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases}, \text{ тогда } D(Y^*) = [0; 0,5]$$

Так как в новом $D(Y^*)$, из-за сужения был потерян только $x = -0,5$, который и есть корень первичного уравнения, то катастрофы не произошло. В общем же, такой способ решения, при котором происходит сужение области определения требует дополнительных исследований, что делает его менее предпочтительным, а иногда и невозможным.

Ответ: $x = -0,5$.

12. $\sqrt{3-y} + \sqrt{y-1} = y^2 - 4y + 6$.

Уравнение можно решать аналогично уравнению 7. Но здесь рассмотрим иной подход, использующий сравнение областей изменения правой и левой частей уравнения.

Введем функцию $f(y) = \sqrt{3-y} + \sqrt{y-1}$.

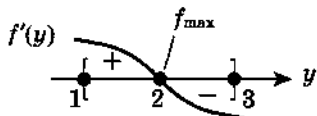
Найдем производную:

$$f'(y) = \frac{-1}{2\sqrt{3-y}} + \frac{1}{2\sqrt{y-1}} = \frac{\sqrt{3-y} - \sqrt{y-1}}{2\sqrt{3-y} \cdot \sqrt{y-1}}.$$

Приравняв производную нулю, получим

$$\sqrt{3-y} = \sqrt{y-1} \text{ или } y = 2 \in [1; 3] = D(Y).$$

Представим полученный результат графически:



$$f_{\max}(y) = f(2) = 2, \text{ т.е. } f(y) \leq 2; \quad \sqrt{3-y} + \sqrt{y-1} \leq 2.$$

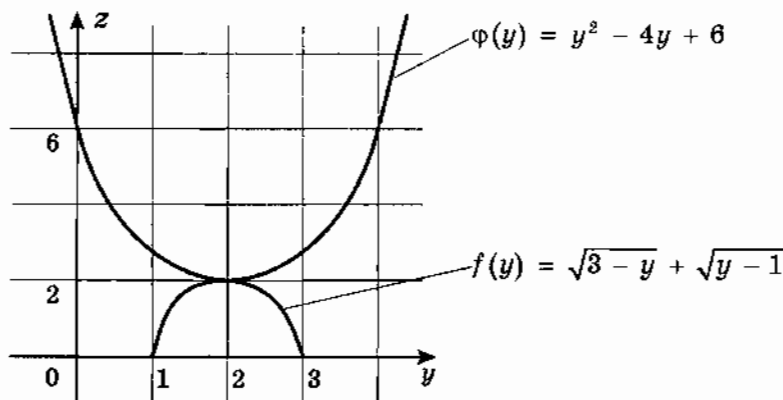
Введем еще функцию $\varphi(y) = y^2 - 4y + 6 = (y-2)^2 + 2 \geq 2$.

$$\begin{cases} f(y) \leq 2 \\ \varphi(y) \geq 2 \end{cases}; \quad f(y) = \varphi(y) = 2 \text{ при } y = 2.$$

Рассмотрим графическое решение.

Построим графики функций $f(y) = \sqrt{3-y} + \sqrt{y-1}$

и $\varphi(y) = y^2 - 4y + 6$.



Ответ: $x = 2$.

13. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} = x^4 + 2$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$D(y): 1 - x^2 \geq 0;$$

$$D(y) = [-1; 1].$$

$$1 + x^2 + 2\sqrt{1-x^4} + 1 - x^2 = (x^4 + 2)^2;$$

$$2 + 2\sqrt{1-x^4} = (x^4 + 2)^2.$$

Введем подстановку: $x^4 + 2 = t > 0$,
тогда $1 - x^4 = 3 - t$.

Получим:

$$2\sqrt{3-t} = t^2 - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4(3-t) = (t^2 - 2)^2; \\ t^2 - 2 \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t^4 - 4t^2 + 4t - 8 = 0; \\ t^2 \geq 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} t^2(t^2 - 4) + 4(t - 2) = 0; \\ t^2 \geq 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (t-2)(t^3 + 2t^2 + 4) = 0 \\ t^2 \geq 2 \end{cases}.$$

Так как $t > 0$, то $t^3 + 2t^2 + 4 > 0$ и уравнение системы имеет единственное решение $t = 2$.

Система примет вид $\begin{cases} t = 2 \\ t^2 \geq 2 \end{cases}$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} x^4 + 2 = 2 \\ x^2 \leq 1 \end{cases}; \quad x = 0.$$

Ответ: $x = -0$.

$$14. \quad 2x + 1 + (x + 1)\sqrt{x^2 + 2} + x\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0.$$

Иногда стандартные методы решения уравнений приводят к технически неразрешимым проблемам. Приведем данное уравнение к уравнению с двумя переменными.

$$\text{Пусть } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = a \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 2} = b \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x^2 + 2x + 3 = a^2 \\ x^2 + 2 = b^2 \end{cases}.$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$a^2 - b^2 = 2x + 1; \quad x = \frac{a^2 - b^2 - 1}{2}; \quad x + 1 = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2}.$$

Учтем, что

$$a = \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{(x+1)^2 + 2} \geq \sqrt{2} \quad \text{и} \quad b = \sqrt{x^2 + 2} \geq \sqrt{2},$$

т.е. $a + b \geq 2\sqrt{2}$.

Тогда исходное уравнение с новыми переменными примет вид:

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2 - 1}{2} \cdot a + \frac{a^2 - b^2 + 1}{2} \cdot b = 0;$$

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot a - \frac{a}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot b + \frac{b}{2} = 0;$$

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot (a + b) - \frac{1}{2}(a - b) = 0;$$

$$(a - b) \left(a + b + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Имеем единственный корень $a = b$.

$$a + b + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{1}{2} > 0, \quad \text{так как } \begin{cases} a + b \geq 2\sqrt{2} \\ \frac{(a+b)^2}{2} > 0 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{x^2 + 2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2; \quad x = -0,5.$$

Ответ: $x = -0,5$.

$$15. \sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = x^3.$$

Введем подстановку: $x^2 = t \geq 0$.

$$\text{Тогда } \sqrt{12 - \frac{12}{t}} + \sqrt{t - \frac{12}{t}} = t; \quad t - \sqrt{12 - \frac{12}{t}} = \sqrt{t - \frac{12}{t}}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$t^2 - 2t\sqrt{12 - \frac{12}{t}} + 12 - \frac{12}{t} = t - \frac{12}{t};$$

$$t^2 - t + 12 = 2\sqrt{12t^2 - 12t}.$$

Напомним, что

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ac + 2ab.$$

После повторного возведения в квадрат получаем:

$$t^4 + t^3 + 12^2 + 24t^2 - 2t^3 - 24t = 4(12t^2 - 12t);$$

$$t^4 - 2t^3 - 23t^2 + 24t + 144 = 0.$$

Обозначим $f(t) = t^4 - 2t^3 - 23t^2 + 24t + 144$.

Так как $f(4) = 0$, то $f(t)$ кратно $(t - 4)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} t^4 - 2t^3 - 23t^2 + 24t + 144 & t - 4 \\ \hline t^4 - 4t^3 & \\ \hline 2t^3 - 23t^2 & \\ -2t^3 + 8t^2 & \\ \hline -15t^2 + 24t & \\ -15t^2 + 60t & \\ \hline -36t + 144 & \\ -36t + 144 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Обозначим $\varphi(t) = t^3 + 2t^2 - 15t - 36$.

Так как $\varphi(4) = 0$, то $\varphi(t)$ кратно $(t - 4)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r}
 t^3 + 2t^2 - 15t - 36 \quad | \quad t - 4 \\
 \underline{t^3 - 4t^2} \\
 6t^2 - 15t \\
 \underline{6t^2 - 24t} \\
 9t - 36 \\
 \underline{9t - 36} \\
 0
 \end{array}$$

Приведем уравнение к виду

$$(t - 4)^2(t + 3)^2 = 0.$$

Уравнение имеет корни $\begin{cases} t = 4 \\ t = -3 \notin [0; +\infty) \end{cases}$.

Возвращаясь к переменной x , получаем $x^2 = 4$,

т.е. $\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

Проверка показывает, что эти значения x являются корнями исходного уравнения.

Примечание. Учитывая четность функций, можно $x = -2$ не проверять.

Существует более простое решение:

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} = x^2 - \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}}. \text{ Правая часть больше нуля.}$$

Возведем обе части в квадрат:

$$12 - \frac{12}{x^2} = x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} + x^2 - \frac{12}{x^2};$$

$$x^4 - 12 - 2x^2\sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} + x^2 = 0;$$

$$x^4 - 12 - 2|x|\sqrt{x^4 - 12} + x^2 = 0; \quad (\sqrt{x^4 - 12} - |x|)^2 = 0;$$

$$\sqrt{x^4 - 12} = |x|; \quad x^4 - x^2 - 12 = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = -3 \notin [0; \infty) \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Проверка показывает, что эти значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\{-2; 2\}$.

Тренировочная работа 2

Решите уравнения 1–15.

$$1. 2\sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} + 3\sqrt{\frac{4+x}{3x+2}} = 5.$$

$$2. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$$

$$3. 4(x + \sqrt{x^2 + x})^{-1} - (x - \sqrt{x^2 + x})^{-1} = 3x^{-1}.$$

$$4. 2\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{1+2x} + \sqrt{2x(2x-1)}.$$

$$5. 2y + 5 + (y + 3)\sqrt{y^2 + 6y + 11} + (y + 2)\sqrt{y^2 + 4y + 6} = 0.$$

$$6. \sqrt{3-2y} + \sqrt{2y-1} = 4y^2 - 8y + 6.$$

$$7. \sqrt{6+2x-4x^2} - \sqrt{4x^2-2x-1} = 1.$$

$$8. \sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{2x+3}{x+6} = 2.$$

$$9. \sqrt{5+\sqrt[3]{x}} + \sqrt{5-\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}.$$

$$10. \sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}.$$

$$11. y\sqrt{y} + \frac{1}{8} = y.$$

$$12. \sqrt{x^2-3x} \cdot \sqrt{2x-4} = 3-x.$$

$$13. \sqrt{x^2-2x} \cdot \sqrt{3x-7} = 3-x.$$

$$14. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2.$$

$$15. \sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 5.$$

Решение тренировочной работы 2

$$1. 2\sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} + 3\sqrt{\frac{4+x}{3x+2}} = 5.$$

Введем подстановку: $\sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} = t \geq 0$.

Исходное уравнение примет вид

$$2t + \frac{3}{t} = 5; \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4}; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} = 1 \\ \sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнений системы:

$$\begin{cases} \frac{3x+2}{4+x} = 1 \\ \frac{3x+2}{4+x} = \frac{9}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 9\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ответ: $\{1; 9\frac{1}{3}\}$.

$$2. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$$

Напомним, что $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Возведем в куб обе части уравнения:

$$x + 2x - 3 + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x-3} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}) = 12(x-1);$$

$$9(x-1) = 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x-3} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}).$$

Но $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$ (согласно исходному уравнению) и, произведя замену, получаем:

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x-3} \cdot \sqrt[3]{12(x-1)} = 3(x-1).$$

Ясно, что после такой замены проверка необходима!

После возведения в куб обеих частей уравнения получаем:

$$x(2x-3)12(x-1) = 27(x-1)^3;$$

$$3(x-1)(4x(2x-3)-9(x-1)^2)=0$$

$$3(x-1)(-x^2+6x-9)=0;$$

$$3(x-1)(x-3)^2=0; \quad \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}.$$

Проверка показывает, что $x=1$ и $x=3$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\{1; 3\}$.

$$3. 4(x+\sqrt{x^2+x})^{-1} - (x-\sqrt{x^2+x})^{-1} = 3x^{-1}.$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{4(x-\sqrt{x^2+x})}{(x+\sqrt{x^2+x})(x-\sqrt{x^2+x})} - \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{(x-\sqrt{x^2+x})(x+\sqrt{x^2+x})} = \frac{3}{x};$$

$$\frac{4(x-\sqrt{x^2+x})}{x^2-x^2-x} - \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x^2-x^2-x} = \frac{3}{x};$$

$$\frac{-4x+4\sqrt{x^2+x}+x+\sqrt{x^2+x}}{x} = \frac{3}{x}; \quad 5\sqrt{x^2+x} - 3x = 3;$$

$$5\sqrt{x^2+x} = 3(x+1).$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$25(x^2+x) = 9(x+1)^2; \quad 25x(x+1) - 9(x+1)^2 = 0;$$

$$(x+1)(25x-9x-9) = 0; \quad \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{9}{16} \end{cases}.$$

Проверка.

$$1) x = -1.$$

$$4(-1+\sqrt{1-1})^{-1} - (-1-\sqrt{1-1})^{-1} = -3;$$

$$-4+1 = -3 \text{ — истина.}$$

$$2) x = \frac{9}{16}.$$

$$4\left(\frac{9}{16} + \sqrt{\frac{9}{16}\left(\frac{9}{16} + 1\right)}\right)^{-1} - \left(\frac{9}{16} - \sqrt{\frac{9}{16}\left(\frac{9}{16} + 1\right)}\right)^{-1} = 3 \cdot \frac{16}{9};$$

$$4\left(\frac{9}{16} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{16}{3},$$

$$4\left(\frac{24}{16}\right)^{-1} - \left(-\frac{6}{16}\right)^{-1} = \frac{16}{3}, \quad \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \quad \text{— истина.}$$

$$\text{Ответ: } \left\{-1; \frac{9}{16}\right\}.$$

$$4. 2\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{1+2x} + \sqrt{2x(2x-1)}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$4(\sqrt{1-2x})^2 + 4\sqrt{1-2x} \cdot \sqrt{1+2x} + 1 + 2x = \\ = 1 + 2x + \sqrt{2x(2x-1)}$$

$$4(1-2x) + 4\sqrt{1-2x} \cdot \sqrt{1+2x} = \sqrt{2x(2x-1)};$$

Возведем в квадрат еще раз обе части уравнения.

$$16(1-2x)^2 + 32(1-2x)\sqrt{1-2x} \cdot \sqrt{1+2x} + \\ + 16(1-2x)(1+2x) = -2x(1-2x);$$

$$2(1-2x)(8(1-2x) + 16\sqrt{1-4x^2} + 8(1+2x) + x) = 0;$$

$$\begin{cases} 1-2x = 0 \\ 8-16x+16\sqrt{1-4x^2}+8+16x+x=0; \\ x=0,5 \\ 16\sqrt{1-4x^2}=-x-16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-2x = 0 \\ 8-16x+16\sqrt{1-4x^2}+8+16x+x=0; \\ x=0,5 \\ 16\sqrt{1-4x^2}=-x-16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,5 \\ \begin{cases} -x - 16 \geq 0 \\ 256(1 - 4x^2) = x^2 + 32x + 256 \end{cases} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 0,5 \\ \begin{cases} -x - 16 \geq 0 \\ 256(1 - 4x^2) = x^2 + 32x + 256 \end{cases} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 0,5 \\ \begin{cases} -x - 16 \geq 0 \\ 256(1 - 4x^2) = x^2 + 32x + 256 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0,5 \\ x \leq -16 \\ x = 0 \\ x = -\frac{32}{1025} \end{cases} \quad \emptyset.$$

Проверка показывает, что $x = 0,5$ — корень уравнения.

Ответ: $x = 0,5$.

При данном способе решения сужения $D(Y)$ нет.

$$5. 2y + 5 + (y + 3)\sqrt{y^2 + 6y + 11} + (y + 2)\sqrt{y^2 + 4y + 6} = 0.$$

Введем подстановку:

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + 6y + 11} = a \geq 0 \\ \sqrt{y^2 + 4y + 6} = b \geq 0 \end{cases}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} a^2 = y^2 + 6y + 11 = (y + 3)^2 + 2 \geq 2 \\ b^2 = y^2 + 4y + 6 = (y + 2)^2 + 2 \geq 2 \end{cases}.$$

Заметим, что $a^2 - b^2 = 2y + 5$.

$$\text{Отсюда } y = \frac{a^2 - b^2 - 5}{2}; \quad y + 2 = \frac{a^2 - b^2 - 1}{2}; \quad y + 3 = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2}.$$

После всех этих подстановок исходное уравнение принимает вид:

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2 + 1}{2}a + \frac{a^2 - b^2 - 1}{2}b = 0;$$

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2}a + \frac{a}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2}b - \frac{b}{2} = 0;$$

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b) = 0;$$

$$(a - b)\left(a + b + \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Так как $a \geq 0$ и $b \geq 0$,

то $a + b + \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{1}{2} > 0$, следовательно, $a = b$.

Возвращаясь к переменной y , получаем

$$\sqrt{y^2 + 6y + 11} = \sqrt{y^2 + 4y + 6}.$$

$$\text{Учитывая, что } \begin{cases} y^2 + 6y + 11 > 0 \\ y^2 + 4y + 6 > 0 \end{cases}$$

и решая полученное уравнение, находим корень $y = -2,5$.

Ответ: $x = -2,5$.

$$6. \sqrt{3-2y} + \sqrt{2y-1} = 4y^2 - 8y + 6.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения и упростим:

$$2 + 2\sqrt{-4y^2 + 8y - 3} = (4y^2 - 8y + 6)^2.$$

Введем подстановку:

$$4y^2 - 8y + 6 = t > 0, \text{ так как } \begin{cases} a = 4 > 0 \\ D < 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$-4y^2 + 8y - 6 = -t; \quad -4y^2 + 8y - 3 = 3 - t.$$

Уравнение примет вид

$$2\sqrt{3-t} = t^2 - 2; \quad \begin{cases} t^2 - 2 \geq 0 \\ 4(3-t) = t^4 - 4t^2 + 4 \end{cases}.$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$(t-2)(t^3 + 2t^2 + 4) = 0.$$

Так как $t^3 + 2t^2 + 4 > 0$, то получим $\begin{cases} t^2 \geq 2 \\ t = 2 \end{cases}$.

Подставляя это значение для t в уравнение

$$4y^2 - 8y + 6 = t, \text{ находим, что } y = 1.$$

После проверки ясно, что $y = 1$ является решением исходного уравнения.

Ответ: $y = 1$.

$$7. \sqrt{6+2x-4x^2} - \sqrt{4x^2-2x-1} = 1.$$

Введем подстановку: $\sqrt{4x^2-2x-1} = t \geq 0$.

Тогда $4x^2 - 2x - 1 = t^2$ и $-4x^2 + 2x + 6 = 5 - t^2$.

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{5-t^2} = 1+t.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения и, зная, что $t \geq 0$, получим:

$$5 - t^2 = 1 + 2t + t^2; \quad \begin{cases} t = -2 \notin [0; \infty) \\ t = 1 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем:

$$\sqrt{4x^2 - 2x - 1} = 1.$$

Решения данного уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

$$8. \sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{2x+3}{x+6} = 2.$$

Перенесем $\frac{2x+3}{x+6}$ в правую часть уравнения и приведем к общему знаменателю. В результате получим $\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{9}{x+6}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\frac{x}{3} = \frac{81}{(x+6)^2}; \quad x^3 + 12x^2 + 36x - 243 = 0.$$

Обозначим $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x - 243$.

$f(3) = 0$, значит $f(x)$ кратно $(x - 3)$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 12x^2 + 36x - 243 & x - 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 & \\ \hline 15x^2 + 36x & \\ - 15x^2 - 45x & \\ \hline 81x - 243 & \\ - 81x + 243 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Найдем корни уравнения $(x - 3)(x^2 + 15x + 81) = 0$.

Так как $x^2 + 15x + 81 \neq 0$ ($D < 0$), то $x = 3$.

Проверка показывает, что $x = 3$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 3$.

$$9. \sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} + \sqrt{5 - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}.$$

Введем подстановку $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} = t \geq 0$.

Тогда $5 + \sqrt[3]{x} = t^2$; $\sqrt[3]{x} = t^2 - 5$; $5 - \sqrt[3]{x} = 10 - t^2$.

Исходное уравнение примет вид:

$$t + \sqrt{10 - t^2} = t^2 - 5; \quad \sqrt{10 - t^2} = t^2 - t - 5.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$10 - t^2 = t^4 + t^2 + 25 - 2t^3 - 10t^2 + 10t;$$

$$t^4 - 2t^3 - 8t^2 + 10t + 15 = 0.$$

Обозначим $f(t) = t^4 - 2t^3 - 8t^2 + 10t + 15$.

$f(3) = 0$, т.е. $f(t)$ кратно $(t - 3)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} t^4 - 2t^3 - 8t^2 + 10t + 15 & t - 3 \\ \underline{t^4 - 3t^3} & t^3 + t^2 - 5t - 5 \\ & -t^3 - 8t^2 \\ & \underline{t^3 - 3t^2} \\ & -5t^2 + 10t \\ & \underline{-5t^2 + 15t} \\ & -5t + 15 \\ & \underline{-5t + 15} \end{array}$$

Очевидно, что $t^3 + t^2 - 5t - 5 = (t + 1)(t^2 - 5)$.

$$\text{Получаем: } \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \notin [0; \infty) \\ t = \sqrt{5} \\ t = -\sqrt{5} \notin [0; \infty) \end{cases}.$$

Возвратимся к переменной x :

$$1) \sqrt{5} + \sqrt[3]{x} = 3; \quad x = 64,$$

$$2) \sqrt{5} + \sqrt[3]{x} = \sqrt{5}; \quad x = 0.$$

Проверка показывает, что только $x = 64$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 64$.

$$10. \sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}.$$

Введем подстановку: $\sqrt{2x - 5} = t \geq 0$.

Тогда $2x - 5 = t^2$; $x = \frac{t^2 + 5}{2}$; $x - 2 = \frac{t^2 + 1}{2}$ и $x + 2 = \frac{t^2 + 9}{2}$.

Исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{\frac{t^2 + 1}{2}} + t + \sqrt{\frac{t^2 + 9}{2}} + 3t = 7\sqrt{2};$$

$$\sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 + 6t + 9} = 14;$$

$$\sqrt{(t + 1)^2} + \sqrt{(t + 3)^2} = 14.$$

Следовательно $|t + 1| + |t + 3| = 14$.

Так как $t \geq 0$, то $t + 1 + t + 3 = 14$; $t = 5$.

Для переменной x получаем $\sqrt{2x - 5} = 5$; $x = 15$.

Ответ: $x = 15$.

11. $y\sqrt{y} + \frac{1}{8} = y$. Введем подстановку: $\sqrt{y} = t \geq 0$.

Тогда $y\sqrt{y} = t^3$. Очевидно, что целых корней исходное уравнение не имеет.

Проверим наличие рациональных корней.

Пусть $t = \frac{1}{a}$. Исходное уравнение примет вид:

$$\frac{8}{a^3} - \frac{8}{a^2} + 1 = 0; \quad a^3 - 8a + 8 = 0.$$

Обозначим $f(a) = a^3 - 8a + 8$.

$f(2) = 0$, т.е. $f(a)$ кратно $(a - 2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 8a + 8 & a - 2 \\ \hline a^3 - 2a^2 & \\ \hline 2a^2 - 8a & \\ - 2a^2 - 4a & \\ \hline -4a + 8 & \\ - -4a + 8 & \\ \hline & \end{array}$$

Уравнение $(a - 2)(a^2 + 2a - 4) = 0$ имеет решения:

$$\begin{cases} a = 2 \\ a = -1 + \sqrt{5} \\ a = -1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной t , получаем

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \\ t = \frac{1}{-1 - \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \notin [0; \infty) \end{cases}$$

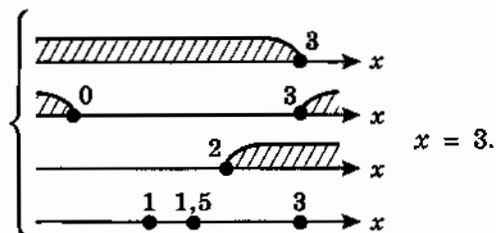
Возвращаясь к переменной y , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{y} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{y} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ y = \frac{\sqrt{5} + 3}{8} \end{cases}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{4}; \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \right\}.$$

12. $\sqrt{x^2 - 3x} \cdot \sqrt{2x - 4} = 3 - x.$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2-3x \geq 0 \\ 2x-4 \geq 0 \\ (x^2-3x)(2x-4) = (3-x)^2 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 3 \\ x(x-3) \geq 0 \\ x \geq 2 \\ (x-3)(2x^2-5x+3) = 0 \end{cases}.$$

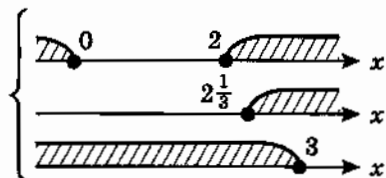


Ответ: $x = 3.$

13. $\sqrt{x^2 - 2x} \cdot \sqrt{3x - 7} = 3 - x.$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 3x - 7 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ x(x-2)(3x-7) = (3-x)^2 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 3x - 7 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ 3x^3 - 14x^2 + 20x - 9 = 0 \end{cases}.$$



Условие равносильности: $x \in [2\frac{1}{3}; 3].$

Корни уравнения $3x^3 - 14x^2 + 20x - 9 = 0$ ищем на $[2\frac{1}{3}; 3].$

Введем $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 20x - 9 = 0.$

$f(1) = 0$, т.е. $f(x)$ кратно $(x-1).$

Выполним деление:

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 14x^2 + 20x - 9 \mid x - 1 \\
 \underline{3x^3 - 3x^2} \\
 -11x^2 + 20x \\
 \underline{-11x^2 + 11x} \\
 9x - 9 \\
 \underline{9x - 9} \\
 0
 \end{array}$$

Найдем и оценим корни уравнения:

$$(x-1)(3x^2 - 11x + 9) = 0:$$

$$x_1 = 1 \notin \left[2\frac{1}{3}; 3\right]; \quad x_2 = \frac{11-\sqrt{13}}{6} \notin \left[2\frac{1}{3}; 3\right];$$

$$x_3 = \frac{11+\sqrt{13}}{6} \in \left[2\frac{1}{3}; 3\right].$$

Примечание. $\frac{7}{8} < \frac{11+\sqrt{13}}{6} < 3$; $14 < 11 + \sqrt{13} < 18$;

$3 < \sqrt{13} < 7$; $9 < 13 < 49$ — истина.

Ответ: $x = \frac{11+\sqrt{13}}{6}$.

14. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$.

Введем подстановку: $\sqrt[3]{x+1} = t$.

Тогда $x+1 = t^3$; $7-x = 8-t^3$.

Исходное уравнение примет вид: $\sqrt[3]{8-t^3} = 2-t$.

Возведем в куб обе части уравнения:

$$8 - t^3 = 8 - 12t + 6t^2 - t^3; \quad 6t(t-2) = 0; \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} = 0 \\ \sqrt[3]{x+1} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; 7\}$.

15. $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 5$.

Введем подстановку: $\sqrt[4]{77+x} = t \geq 0$.

Тогда $77+x = t^4$; $x = t^4 - 77$.

Исходное уравнение примет вид: $\sqrt[4]{97-t^4} = 5-t$, ($t \leq 5$).

Напомним, что $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Возведем в четвертую степень:

$$97 - t^4 = 5^4 - 4 \cdot 5^3 \cdot t + 6 \cdot 5^2 \cdot t^2 - 4 \cdot 5 \cdot t^3 + t^4.$$

Перегруппировав слагаемые и сократив на 2, получим

$$t^4 - 10t^3 + 75t^2 - 250t + 264 = 0.$$

Обозначим $f(t) = t^4 - 10t^3 + 75t^2 - 250t + 264$.

$f(3) = 0$, т.е. $f(t)$ кратно $(t-3)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} t^4 - 10t^3 + 75t^2 - 250t + 264 & t - 3 \\ \hline -t^4 & +3t^3 \\ \hline -7t^3 & +75t^2 \\ - & -7t^3 + 21t^2 \\ \hline & -54t^2 - 250t \\ & -54t^2 - 162t \\ \hline & -88t + 264 \\ & -88t + 264 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Обозначим $\varphi(t) = t^3 - 7t^2 + 54t - 88$.

$\varphi(2) = 0$, т.е. $\varphi(t)$ кратно $(t-2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 7t^2 + 54t - 88 & t - 2 \\ \hline -t^3 & +2t^2 \\ \hline & -5t^2 + 54t \\ & -5t^2 + 10t \\ \hline & 44t - 88 \\ & 44t - 88 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Так как уравнение $t^2 - 5t + 44$ корней не имеет ($D < 0$), то получаем

$$\begin{cases} t = 3 \in [0; 5] \\ t = 2 \in [0; 5] \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[4]{77+x} = 3 \\ \sqrt[4]{77+x} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -61 \end{cases}$$

Ответ: $\{-61; 4\}$.

Самостоятельная работа 1**Вариант 1**

1. $\sqrt{3 + \sqrt{5 - x}} = \sqrt{x}.$

2. $4\sqrt{3 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{3x+1}} = 3.$

3. $\sqrt[3]{x+7} = \sqrt{x+3}.$

4. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = 0,5\sqrt[3]{8-x}.$

5. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2.$

6. $(x^2 - 9x + 14)\sqrt{x^2 - 9} = 0.$

7. $\sqrt{1-7x} - \sqrt{6+x} = \sqrt{15-2x}.$

8. $2\sqrt{x^2 + 2x + 4} - 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 9}.$

9. $\sqrt{-x-1} = 1 - \sqrt[3]{2+x}.$

10. $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{7-x} = 3.$

Вариант 2

1. $\sqrt{3 + \sqrt{5 + x}} = \sqrt{-x}.$

2. $4\sqrt{3 - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{3x-1}} = 3.$

3. $\sqrt{3-x} + \sqrt[3]{x-7} = 0.$

4. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+16} + 0,5\sqrt[3]{x+8} = 0.$

5. $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+7} + 2.$

6. $(x^2 + 9x + 14)\sqrt{x^2 - 16} = 0.$

7. $\sqrt{1+7x} - \sqrt{15+2x} = \sqrt{6-x}.$

8. $2\sqrt{x^2 - 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 9} = 1.$

9. $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} = 1.$

10. $\sqrt[3]{x+7} - 3 = \sqrt[3]{x-2}.$

Примеры нестандартных способов решения иррациональных уравнений

Практикум 3

Рассмотрим еще несколько приемов, используемых при решении уравнений.

$$1. \frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = 6 - x.$$

Допустим, что $x \neq 5$:
$$\frac{\sqrt[3]{x-5} \left(\sqrt[3]{\frac{7-x}{x-5}} - 1 \right)}{\sqrt[3]{x-5} \left(\sqrt[3]{\frac{7-x}{x-5}} + 1 \right)} = 6 - x.$$

Введем подстановку: $\sqrt[3]{\frac{7-x}{x-5}} = t.$

Тогда $\frac{7-x}{x-5} = t^3$; $7-x = (x-5)t^3$; $7+5t^3 = x+xt^3$;

$$x = \frac{7+5t^3}{1+t^3}; \quad x-6 = \frac{1-t^3}{1+t^3}.$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{t-1}{t+1} + \frac{1-t^3}{1+t^3} = 0; \quad \frac{t-1}{t+1} \left(1 - \frac{t^2+t+1}{t^2-t+1} \right) = 0;$$

$$\frac{-2t(t-1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = 0; \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{7-x}{x-5}} = 0 \\ \sqrt[3]{\frac{7-x}{x-5}} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 7 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Посмотрим, что будет с исходным уравнением при $x = 5$:

$$\frac{\sqrt[3]{7-5} - \sqrt[3]{5-5}}{\sqrt[3]{7-5} + \sqrt[3]{5-5}} = 6 - 5; \quad 1 = 1 \text{ — истина.}$$

Ответ: {5; 6; 7}.

$$2. \sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

Так как $1 - x^2 \geq 0$, то $-1 \leq x \leq 1$.

Введем подстановку: $x = \sin \alpha$.

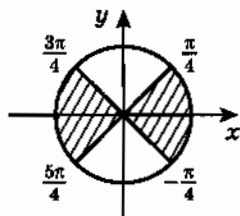
Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{\frac{1+2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}} = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\sqrt{\frac{1+2\sin\alpha|\cos\alpha|}{2}} = \cos 2\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha \geq 0 \\ 1 + 2\sin\alpha|\cos\alpha| = 2\cos^2 2\alpha. \end{cases}$$

Так как $\cos 2\alpha \geq 0$, то $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



А. Если $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$,

то $\cos \alpha > 0$, т.е. $|\cos \alpha| = \cos \alpha$.

Тогда $1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\cos^2 2\alpha$;

$$\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2;$$

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 0;$$

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 (1 - 2(\cos \alpha - \sin \alpha)^2) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos \alpha + \sin \alpha = 0 \\ (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. $\cos \alpha + \sin \alpha = 0$.

$$\operatorname{tg} \alpha = -1, \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$\text{Так как } \alpha = -\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \quad \alpha = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\text{то } \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Подставив это значение в уравнение $x = \sin \alpha$,

$$\text{получим } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2. (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}; \quad \sin 2\alpha = 1 - \frac{1}{2};$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$2\alpha = \frac{\pi}{6}(-1)^k + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12}(-1)^k + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Проверим, при каких значениях k справедливо утверждение $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$?

$$1) k = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{12} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right];$$

$$2) k = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} \notin \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right];$$

$$3) k = 2, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{12} + \pi \notin \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right];$$

$$4) k = -1, \quad \alpha_4 = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12} \notin \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\text{Следовательно, } \sin \alpha_1 = \sin \frac{\pi}{12}; \quad \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}}.$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Подставив это значение в уравнение $x = \sin \alpha$, получим $x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

В. Если $\alpha \in \left[\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$, то $\cos \alpha < 0$,

$$\text{т. е. } |\cos \alpha| = -\cos \alpha.$$

$$\text{Тогда } \frac{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \cos^2 2\alpha;$$

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2;$$

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 (1 - 2(\cos \alpha + \sin \alpha)^2) = 0.$$

1. $\cos \alpha = \sin \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = 1; \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

но $\alpha \in \text{II}$ или III четверти, поэтому только

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi \in \left[\frac{3}{4} \pi; \frac{5}{4} \pi \right].$$

$$\text{Следовательно, } \sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) = \sin \frac{5}{4} \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставив это значение в уравнение $x = \sin \alpha$,

$$\text{получим } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. $1 - 2(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 0$.

$$1 - 2(1 + \sin 2\alpha) = 0; \quad \sin 2\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$2\alpha = \frac{\pi}{6}(-1)^{k+1} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12}(-1)^{k+1} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Проверим, при каких значениях k справедливо

условие $\alpha \in \left[\frac{3}{4} \pi; \frac{5}{4} \pi \right]$?

$$1) \quad k = 0, \quad \alpha_1 = -\frac{\pi}{12} \notin \left[\frac{3}{4} \pi; \frac{5}{4} \pi \right];$$

$$2) \quad k = 1, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{12} \pi \notin \left[\frac{3}{4} \pi; \frac{5}{4} \pi \right];$$

$$3) \quad k = 2, \quad \alpha_3 = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11}{12} \pi \in \left[\frac{3}{4} \pi; \frac{5}{4} \pi \right];$$

$$4) \quad k = 3, \quad \alpha_4 = \frac{\pi}{12} + \frac{3}{2} \pi = \frac{19}{12} \pi \notin \left[\frac{3}{4} \pi; \frac{5}{4} \pi \right].$$

$$\text{Следовательно, } \sin \alpha_3 = \sin \frac{11}{12} \pi; \quad \sin \frac{11}{12} \pi = \sin \frac{\pi}{12}.$$

Подставив это значение в уравнение $x = \sin \alpha$,

$$\text{получим } x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \right\}.$$

Решим это же уравнение алгебраическим способом:

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1;$$

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x^2 \geq 0 \\ 1 + 2x\sqrt{1-x^2} = 2(1 - 4x^2 + 4x^4); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -8x^2(1-x^2) + 2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

Для решения последнего уравнения используем подстановку: $x\sqrt{1-x^2} = t$.

Получаем:

$$-8t^2 + 2 = 1 + 2t; \quad \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$1) \quad x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 \leq 1 \\ x^2(1-x^2) = \frac{1}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ (2x^2 - 1)^2 = 0 \end{cases}; \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2) \quad x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \leq 1 \\ x^2(1-x^2) = \frac{1}{16} \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ 16x^4 - 16x^2 + 1 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ (x^2)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{16} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Но } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \notin \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

$$3. \sqrt{x^2 + 14x + 47} - 1 = |x + 7| - 1.$$

Введем подстановку: $|x + 7| = t \geq 0$.

Исходя из того, что $|a|^2 = a^2$, получаем $|x + 7|^2 = t^2$.

Так как $x^2 + 14x + 49 = t^2$, то $x^2 + 14x + 47 = t^2 - 2$.

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2 - 2} - 1 = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 \geq 0 \\ |t^2 - 2| - 1 = t^2 - 2t + 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t \geq 1 \\ |t^2 - 2| = t^2 - 2t + 2 \end{cases}.$$

Так как $t^2 - 2t + 2 = (t - 1)^2 + 1 > 0$

и $|t^2 - 2|^2 = (t^2 - 2)^2$, то получаем:

$$\begin{cases} t \geq 1 \\ (t^2 - 2)^2 = (t^2 - 2t + 2)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} t \geq 1 \\ t(t - 1)(t - 2) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t \geq 1 \\ \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} |x + 7| = 1 \\ |x + 7| = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 7 = 1 \\ x + 7 = -1 \\ x + 7 = 2 \\ x + 7 = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -6 \\ x = -8 \\ x = -5 \\ x = -9 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-9; -8; -6; -5\}$.

$$4. \sqrt{x - 2} = \frac{5x^2 - 10x + 1}{x^2 + 6x - 11}.$$

Введем подстановку: $\sqrt{x - 2} = t \geq 0$.

Тогда $x - 2 = t^2$ и $x = t^2 + 2$.

Исходное уравнение примет вид

$$t = \frac{5(t^2+2)^2-10(t^2+2)+1}{(t^2+2)^3+6(t^2+2)-11}; \quad t = \frac{5t^4+10t^2+1}{t^4+10t^2+5};$$

$$t^5 + 10t^3 + 5t = 5t^4 + 10t^2 + 1;$$

$$t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t - 1 = 0.$$

Напомним, что:

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Очевидно, что левая часть уравнения равна $(t-1)^5$.

Решение уравнения — $t = 1$. Возвращаясь к переменной x , получаем $\sqrt{x-2} = 1$ или $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

$$5. \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Умножим обе части исходного уравнения на $\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Получим

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x};$$

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}; \quad \sqrt{x^2 - x} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + x.$$

Очевидно, что уравнение $\sqrt{x^2 - x} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + x$ равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - x = \frac{1}{4}(x - 4x\sqrt{x} + 4x^2); \\ -\frac{1}{2}\sqrt{x} + x \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x - 4x\sqrt{x} = 0; \\ 2x \geq \sqrt{x} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{25}{16} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{25}{16} \end{cases}.$$

Однако $x = 0 \notin [1; \infty)$, т. е. не является корнем первоначального уравнения. $\frac{25}{16} \in [1; \infty)$.

Ответ: $x = \frac{25}{16}$.

$$D(y): \begin{cases} x + \sqrt{x} \geq 0 \\ x - \sqrt{x} \geq 0; \\ \frac{x}{x+\sqrt{x}} \geq 0 \end{cases}$$

$$D(y) = [1; \infty).$$

6. $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

Возведем обе части уравнения в третью степень (равносильное преобразование):

$$2-x = 1 - 3\sqrt{x-1} + 3(\sqrt{x-1})^2 - (x-1)\sqrt{x-1};$$

$$1-x = -3\sqrt{x-1} + 3(\sqrt{x-1})^2 - (x-1)\sqrt{x-1}.$$

Введем подстановку: $\sqrt{x-1} = t \geq 0$.

Тогда $x-1 = t^2$.

Уравнение примет вид

$$-t^2 = -3t + 3t^2 - t^2 \cdot t.$$

Находим корни: $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x-1} = 1; \\ \sqrt{x-1} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 10 \end{cases}.$$

Ответ: $\{1; 2; 10\}$.

7. $\sqrt[3]{4-4x+x^2} + \sqrt[3]{x^2+14x+49} = 3 + \sqrt[3]{14-5x-x^2}$.

Любое решение данного уравнения является решением уравнения

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+7)^2} = 3 + \sqrt[3]{-(x+7)(x-2)}.$$

Введем подстановки $\sqrt[3]{x-2} = a$; $\sqrt[3]{x+7} = b$.

Тогда $a^3 = x-2$; $b^3 = x+7$.

Заметим, что $b^3 - a^3 = 9$.

В новых переменных уравнение примет вид:

$$a^2 + b^2 = 3 - a \cdot b.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ b^3 - a^3 = 9 \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ (b-a)(a^2 + ab + b^2) = 9 \end{cases}.$$

Решая систему уравнений, получаем $\begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} \sqrt[3]{x-2} = -1 \\ \sqrt[3]{x-2} = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$.

Примечание. Если решать уравнение относительно «b», то корни будут те же самые.

Ответ: $\{-6; 1\}$.

$$8. \sqrt{\frac{x^2+66^2+x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2} = 5.$$

Введем подстановки: $\sqrt{\frac{x^2+66^2+x}{x}} = t \geq 0$,

$$\sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2} = z \geq 0.$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{x^2+66^2+x}{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2} = tz;$$

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{x^2+66^2+x}) \cdot x(\sqrt{x^2+66^2}-x)}{x}} = tz,$$

$$\sqrt{x^2+66^2-x^2} = tz \text{ или } tz = 66.$$

Составим систему уравнений: $\begin{cases} t - z = 5 \\ tz = 66 \end{cases}$.

Решая систему, находим $\begin{cases} z_1 = -11 \notin [0; \infty) \\ z_2 = 6 \end{cases}$; $z = 6$, и,

соответственно, $t = 11$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{\frac{x^2+66^2+x}{x}} = 11.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\sqrt{x^2+66^2}+x=121x; \quad \sqrt{x^2+66^2}=120x.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+66^2=120^2x^2 \end{cases}$$

Решаем уравнение:

$$66^2 = (120x + x)(120x - x); \quad 66^2 = 121 \cdot 119 \cdot x^2;$$

$$x^2 = \frac{11^2 \cdot 6^2}{121 \cdot 119}.$$

$$\text{Получаем } \begin{cases} x = \frac{6\sqrt{119}}{119} \\ x = -\frac{6\sqrt{119}}{119}; \quad x = \frac{6\sqrt{119}}{119} \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Примечание. Решив уравнение $\sqrt{x}\sqrt{x^2 + 66^2} - x^2 = 6$, получим те же корни.

$$\text{Ответ: } x = \frac{6\sqrt{119}}{119}.$$

$$9. \sqrt[6]{1,5} \cdot \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}} = 0.$$

Введем подстановку: $\sqrt[6]{x - \frac{1}{x}} = t \geq 0$.

$$\text{Тогда } \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = t^2, \quad \sqrt{x - \frac{1}{x}} = t^3.$$

Исходное уравнение принимает вид:

$$\sqrt[6]{1,5} t^2 - t^3 = 0; \quad t^2 (\sqrt[6]{1,5} - t) = 0; \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt[6]{1,5} \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x - \frac{1}{x}} = 0 \\ \sqrt[6]{x - \frac{1}{x}} = \sqrt[6]{1,5} \end{cases}.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ — корни первого уравнения.}$$

$$\text{Решая уравнение } \sqrt[6]{x - \frac{1}{x}} = \sqrt[6]{1,5} \text{ или } x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2},$$

$$\text{получаем } \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{-1; -\frac{1}{2}; 1; 2\}.$$

$$10. \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x(x+7)} = 35 - 2x.$$

Введем подстановку: $\sqrt{x} = a \geq 0$ и $\sqrt{x+7} = b \geq 0$.

Тогда $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+7} = a \cdot b$;

$$x = a^2; \quad x+7 = b^2;$$

$$2x = a^2 + b^2 - 7; \quad b^2 - a^2 = 7.$$

Исходное уравнение принимает вид:

$$a + b + 2ab = 35 - (a^2 + b^2 - 7);$$

$$(a+b)^2 + (a+b) - 42 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно $(a+b)$, находим:

$$\begin{cases} a+b = 6 \\ a+b = -7 \notin [0; \infty) \end{cases}.$$

Учитывая, что $b^2 - a^2 = 7$, получаем

$$\begin{cases} a+b = 6 \\ b^2 - a^2 = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} a+b = 6 \\ b-a = \frac{7}{6} \end{cases}.$$

Эта система имеет решение $(\frac{29}{12}; \frac{43}{12})$.

Возвращаясь к переменной x , получаем $\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{29}{12} \\ \sqrt{x+7} = \frac{43}{12} \end{cases}.$

Следовательно, $x = \frac{841}{144}$ является решением данного уравнения.

Ответ: $x = \frac{841}{144}$.

$$11. \sqrt[3]{x^2 - 2} = \sqrt{2 - x^3}.$$

Так как $\sqrt{2 - x^3} \geq 0$, то $\sqrt[3]{x^2 - 2} \geq 0$,

следовательно, $x^2 - 2 \geq 0$.

Таким образом:

$$\begin{cases} x \leq \sqrt[3]{2} \\ \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{штрихованная область} \\ \text{штрихованная область} \end{cases}$$

$(-\infty; -\sqrt{2}]$ — область, где могут быть корни.

Рассмотрим графическое решение исходного уравнения.

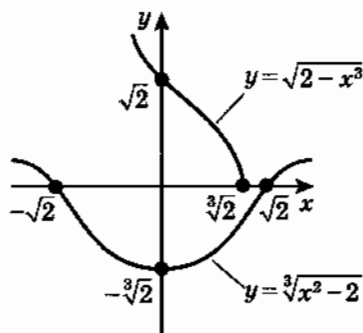
Функция $y = \sqrt[3]{x^2 - 2}$ — четная, т.е. график симметричен относительно оси ординат,

$$y = 0 \text{ при } x_{1,2} = \pm\sqrt{2},$$

$$x = 0 \text{ при } y = -\sqrt[3]{2}.$$

Функция $y = \sqrt{2 - x^3}$ — убывающая,

$$y = 0 \text{ при } x = \sqrt[3]{2}, \quad x = 0 \text{ при } y = \sqrt{2}.$$



Очевидно, что на промежутке $(-\infty; -\sqrt{2}]$ функции не пересекаются, т.е. данное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

$$12. \frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} = \sqrt{x}.$$

$$D(y): x \geq \sqrt{3}.$$

Умножим и разделим почленно левую часть уравнения на выражения, сопряженные знаменателям:

$$\frac{(x+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}})}{x-x-\sqrt{3}} + \frac{(x-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}})}{x-x+\sqrt{3}} = \sqrt{x};$$

$$-\sqrt{x}(x+\sqrt{3}) + (\sqrt{x+\sqrt{3}})^3 + \sqrt{x}(x-\sqrt{3}) + (\sqrt{x-\sqrt{3}})^3 = \sqrt{3}x.$$

Приведем подобные члены в левой части уравнения:

$$(\sqrt{x+\sqrt{3}})^3 + (\sqrt{x-\sqrt{3}})^3 = 3\sqrt{3}x.$$

Возведем теперь в квадрат обе части уравнения:

$$(x+\sqrt{3})^3 + (x-\sqrt{3})^3 + 2(\sqrt{x+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x-\sqrt{3}})^3 = 27x;$$

$$x^3 + 3x^2\sqrt{3} + 3 \cdot x \cdot 3 + 3\sqrt{3} + 2(\sqrt{x^2 - 3})^3 + \\ + x^3 - 3x^2\sqrt{3} + 3 \cdot x \cdot 3 - 3\sqrt{3} = 27x;$$

$$2(x^2 - 3)^{\frac{3}{2}} = 9x - 2x^3.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 9x - 2x^3 \geq 0 \\ 4(x^2 - 3)^3 = 81x^2 - 36x^4 + 4x^6; \\ x \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(9 - 2x^2) \geq 0 \\ x \geq \sqrt{3} \\ 4x^6 - 36x^4 + 108x^2 - 108 = 81x^2 - 36x^4 + 4x^6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \sqrt{4,5} \\ x \geq \sqrt{3} \\ x^2 = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{4,5} \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}; \quad x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

13. Найдите сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{x+2} = x^2 + 2x - 8.$$

Уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 \geq 0 \\ x + 2 = (x^2 + 2x - 8)^2 \end{cases}$$

т.к. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$,

то $x + 2 = x^4 + 4x^2 + 64 + 4x^3 - 16x^2 - 32x$

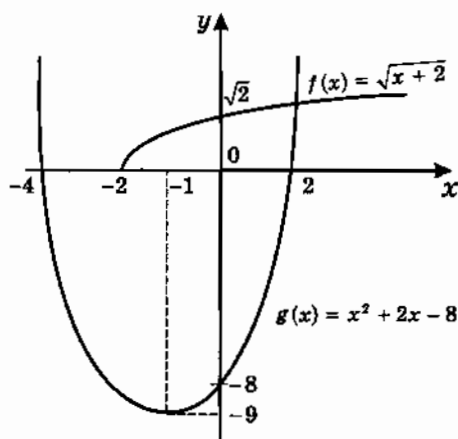
$$x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 33x + 62 = 0$$

т. к. $d = \pm 1; \pm 2; \pm 31; \pm 62$, то легко проверить, что целых корней нет. Можно искать другие способы, но это технически достаточно сложно.

Попробуем графический способ.

Пусть $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^2 + 2x - 8$

Построим графики этих функций на одном чертеже и найдем сколько точек пересечения при этом получится.



Из графиков функций видно, что есть только одна точка пересечения. Значит уравнение имеет только один корень на $[2; \infty)$.

Ответ: Один корень.

14. Решите уравнение $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{8}{5} - \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+26}}$.

Попробуем стандартный путь введения новой переменной.

Пусть $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t$ ($t \geq 0$)

$$x^2 + 2x + 2 = t^2$$

уравнение приобретает вид $\frac{1}{t} = \frac{8}{5} - \frac{3}{\sqrt{t^2+24}}$ приведя его к рациональному виду,

получим

$$5\sqrt{t^2 + 24} = 8t\sqrt{t^2 + 24} - 15t \text{ — уравнение, которое}$$

решить технически очень сложно.

Выберем тогда другой подход, связанный с анализом области изменения правой и левой части уравнения.

а) так как $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1$,

то $\sqrt{x^2 + 2x + 2} \geq 1$ и $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \leq 1$,

причем равенство возможно только при $x = -1$.

б) $x^2 + 2x + 26 = (x + 1)^2 + 25 \geq 25$,

значит $\sqrt{x^2 + 2x + 26} \geq 5$,

а тогда $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} \leq \frac{1}{5}$ и $\frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} \leq \frac{3}{5}$.

Умножив обе части неравенства на -1 ,

получим $-\frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} \geq -\frac{3}{5}$.

Прибавим к обеим частям $\frac{8}{5}$, тогда $\frac{8}{5} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} \geq 1$,

равенство возможно только при $x = -1$.

Итак: так как левая часть уравнения меньше или равна единице, а правая больше или равна единице, причем в обоих случаях, равенство есть только при $x = -1$, значит обе части одновременно равны единице, и $x = -1$ — корень уравнения.

Ответ: $x = -1$.

Тренировочная работа 3

Решите уравнения 1–18.

$$1. 5\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2+6x+8} + 2\sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}} = 11.$$

$$2. \sqrt[5]{x^2+45-14x} + \sqrt[5]{14x-13-x^2} = 2.$$

$$3. 3(x+1)\sqrt{x^2+2x+7} + 3(x+3)\sqrt{x^2+6x+15} = 20(x+2).$$

$$4. 2\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x} + \sqrt{x(x+2)}.$$

$$5. \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{x\sqrt{3}+\sqrt{x\sqrt{3}+1}}} + \frac{x\sqrt{3}-1}{\sqrt{x\sqrt{3}-\sqrt{x\sqrt{3}-1}}} = \sqrt{x\sqrt{3}}.$$

$$6. \sqrt{\frac{x}{4}} + \frac{3x+2}{x+3} = 3.$$

$$7. \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} = \sqrt[3]{2x-1}.$$

$$8. \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2.$$

$$9. \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2.$$

$$10. \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2+28^2-x^2} = 3.$$

$$11. \sqrt[5]{(x-2)(x-32)} - \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1.$$

$$12. x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+2x} = 3.$$

$$13. \sqrt{x+1} = \frac{5x^2+20x+16}{x^2+12x+16}.$$

$$14. \sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}.$$

$$15. \sqrt{\frac{1}{3}-x} + x - 1 = \sqrt{x-\frac{1}{4}} + \sqrt{x-\frac{1}{6}}.$$

$$16. \sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4.$$

$$17. \sqrt[3]{2-x} = 2 - x^3.$$

$$18. 3x - 2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2|\sqrt{3x+18} - 2|.$$

Решение тренировочной работы 3

$$1. 5\sqrt{x+3+\sqrt{x^2+6x+8}} + 2\sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}} = 11.$$

Введем подстановку:

$$\sqrt{x+3+\sqrt{x^2+6x+8}} = a \geq 0 \text{ и}$$

$$\sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}} = b \geq 0.$$

Отметим, что

$$ab = \sqrt{x+3+\sqrt{x^2+6x+8}} \cdot \sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}} = 1.$$

Тогда можем составить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5a + 2b = 11 \\ ab = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = \frac{1}{b} \\ 5 + 2b^2 = 11b \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 5 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$1) \sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}} = 5.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x+3-\sqrt{x^2+6x+8} = 25; \quad x-22 = \sqrt{x^2+6x+8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-22 \geq 0 \\ x^2-44x+484 = x^2+6x+8 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 22 \\ x = 9\frac{13}{25} \end{cases},$$

т.е. данная система решений не имеет.

$$2) \sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}} = \frac{1}{2}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x+3-\sqrt{x^2+6x+8} = \frac{1}{4}$$

$$x+2,75 = \sqrt{x^2+6x+8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2,75 \geq 0 \\ x^2+2 \cdot 2,75x+2,75^2 = x^2+6x+8 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -2\frac{3}{4} \\ x = -\frac{7}{8} \end{cases}.$$

Ответ: $x = -\frac{7}{8}$.

$$2. \sqrt[5]{x^2 + 45 - 14x} + \sqrt[5]{14x - 13 - x^2} = 2.$$

Введем подстановку: $\sqrt[5]{x^2 + 45 - 14x} = a$.

Тогда $x^2 - 14x + 45 = a^5$; $-x^2 + 14x - 13 = -a^5 + 32$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt[5]{32 - a^5} = 2 - a$.

Напомним, что

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Возведем обе части уравнения в пятую степень:

$$32 - a^5 = 2^5 - 5 \cdot 2^4 \cdot a + 10 \cdot 2^3 \cdot a^2 - 10 \cdot 2^2 \cdot a^3 + 5 \cdot 2 \cdot a^4 - a^5;$$

$$10a(a^3 - 4a^2 + 8a - 8) = 0.$$

Получаем $\begin{cases} a = 0 \\ (a - 2)(a^2 - 2a + 4) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}.$

Примечание. Уравнение $a^2 - 2a + 4 = 0$ решений не имеет, так как $a^2 - 2a + 4 = (a - 1)^2 + 3 > 0$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} x^2 - 14x + 45 = 0 \\ \sqrt[5]{x^2 - 14x + 45} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 9 \\ x = 5 \\ x = 13 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{1; 5; 9; 13\}$.

$$3. 3(x+1)\sqrt{x^2+2x+7} + 3(x+3)\sqrt{x^2+6x+15} = 20(x+2).$$

Введем подстановки:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 7} = a \geq 0 \text{ и } \sqrt{x^2 + 6x + 15} = b \geq 0.$$

Тогда $x^2 + 2x + 7 = a^2$; $x^2 + 6x + 15 = b^2$;

$$b^2 - a^2 = 8 + 4x; \quad x = \frac{b^2 - a^2 - 8}{4}; \quad x + 1 = \frac{b^2 - a^2 - 4}{4};$$

$$x + 2 = \frac{b^2 - a^2}{4}; \quad x + 3 = \frac{b^2 - a^2 + 4}{4};$$

$$a = \sqrt{(x+1)^2 + 6} \geq \sqrt{6}; \quad b = \sqrt{(x+3)^2 + 6} \geq \sqrt{6};$$

$$a + b \geq 2\sqrt{6}.$$

Исходное уравнение примет вид

$$3 \frac{b^2 - a^2 - 4}{4} \cdot a + 3 \frac{b^2 - a^2 + 4}{4} \cdot b - 5(b^2 - a^2) = 0$$

$$\frac{3}{4}(b^2 - a^2) \cdot a - 3a + \frac{3}{4}(b^2 - a^2) \cdot b + 3b - 5(b^2 - a^2) = 0.$$

Воспользуемся формулой сокращенного умножения $(b^2 - a^2) = (b - a)(b + a)$, сгруппируем слагаемые $3b$ и $-3a$, вынесем за скобку общий множитель:

$$(b - a) \left(\frac{3}{4}a(b + a) + 3 + \frac{3}{4}b(b + a) - 5(b + a) \right) = 0.$$

После дальнейших упрощений получим:

$$(b - a) \left(3(b + a)^2 - 20(b + a) + 12 \right) = 0.$$

Одно из решений: $b = a$.

Решим квадратное уравнение $3(b + a)^2 - 20(b + a) + 12 = 0$ относительно $(b + a)$. Получим

$$\begin{cases} b + a = 6 \\ b + a = \frac{2}{3} \notin [2\sqrt{6}; \infty) \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 7} = 6 - \sqrt{x^2 + 6x + 15} \\ \sqrt{x^2 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 + 6x + 15} \end{cases} \quad (1)$$

Возведем в квадрат обе части каждого из уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 7 = 36 + x^2 + 6x + 15 - 12\sqrt{x^2 + 6x + 15} \\ x^2 + 2x + 7 = x^2 + 6x + 15 \end{cases}$$

Решение второго уравнения: $x = -2$.

Упростив вид первого уравнения, получим

$$3\sqrt{x^2 + 6x + 15} = 11 + x. \quad (2)$$

Вновь возведем в квадрат обе части уравнения:

$$9(x^2 + 6x + 15) = 121 + 22x + x^2;$$

$$8x^2 + 32x + 14 = 0.$$

Делим левую часть на 2, находим корни уравнения

$$4x^2 + 16x + 7 = 0; \quad x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = -3\frac{1}{2}.$$

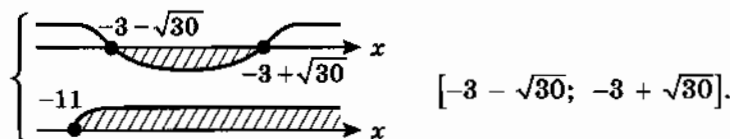
Учитывая D(Y) уравнений и условия равносильности двух переходов при возведении в квадрат, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x + 15} \leq 6; \\ x + 11 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 6x - 21 \leq 0 \\ x \geq -11 \end{cases}.$$

Примечание: $x^2 + 6x + 15 = (x + 3)^2 + 6 > 0$,

$$x^2 + 2x + 7 = (x + 1)^2 + 6 > 0.$$

Графически иллюстрируем это так:



Убеждаемся, что $-\frac{1}{2} \in [-3 - \sqrt{30}; -3 + \sqrt{30}]$;

$$-3\frac{1}{2} \in [-3 - \sqrt{30}; -3 + \sqrt{30}].$$

Ответ: $\{-3\frac{1}{2}; -2; -\frac{1}{2}\}$.

4. $2\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x} + \sqrt{x(x+2)}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$4(\sqrt{x+2})^2 + 4\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2-x} + 2-x = 2-x + \sqrt{x(x+2)};$$

$$4(\sqrt{x+2})^2 + 4\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2-x} = \sqrt{x(x+2)}.$$

Учтя соображения, изложенные в комментариях к 11 примеру пр.2 (стр. 27, 28), получаем:

$$\begin{cases} x = -2 \\ 4\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{x}; \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ 32\sqrt{4-x^2} = x - 64; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x \geq 64 \\ 32^2(4-x^2) = x^2 - 128x + 64^2 \end{cases}.$$

С учетом решений последнего уравнения получаем

$$\begin{cases} x = -2 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{128}{1025} \end{cases} ; x = -2. \\ x \geq 64 \end{cases}$$

После проверки ясно, что $x = -2$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $x = -2$.

$$5. \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{x\sqrt{3}+\sqrt{x\sqrt{3}+1}}} + \frac{x\sqrt{3}-1}{\sqrt{x\sqrt{3}-\sqrt{x\sqrt{3}-1}}} = \sqrt{x\sqrt{3}}.$$

Умножим и разделим почленно левую часть уравнения на выражения, сопряженные знаменателям.

$$D(y): \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}; x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{3} \cdot x + 1)(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x + 1} - \sqrt{\sqrt{3} \cdot x})}{(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x + 1} + \sqrt{\sqrt{3} \cdot x})(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x + 1} - \sqrt{\sqrt{3} \cdot x})} + \\ & + \frac{(\sqrt{3} \cdot x - 1)(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x} + \sqrt{\sqrt{3} \cdot x - 1})}{(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x} - \sqrt{\sqrt{3} \cdot x - 1})(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x} + \sqrt{\sqrt{3} \cdot x - 1})} = \sqrt{\sqrt{3} \cdot x}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x + 1})^3 - \sqrt{3} \cdot x \cdot \sqrt{\sqrt{3} \cdot x} - \sqrt{\sqrt{3} \cdot x}}{\sqrt{3} \cdot x + 1 - \sqrt{3} \cdot x} + \\ & + \frac{(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x - 1})^3 + \sqrt{3} \cdot x \cdot \sqrt{\sqrt{3} \cdot x} - \sqrt{\sqrt{3} \cdot x}}{\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3} \cdot x + 1} = \sqrt{\sqrt{3} \cdot x}. \end{aligned}$$

Взаимно уничтожим $-(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x})^3$ и $(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x})^3$ и перенесем $-2\sqrt{\sqrt{3} \cdot x}$ в правую часть уравнения:

$$(\sqrt{\sqrt{3} \cdot x + 1})^3 + (\sqrt{\sqrt{3} \cdot x - 1})^3 = 3\sqrt{\sqrt{3} \cdot x}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3}x + 1)^3 + 2(\sqrt{(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)})^3 + (\sqrt{3}x - 1)^3 = \\ & = 9\sqrt{3}x. \end{aligned}$$

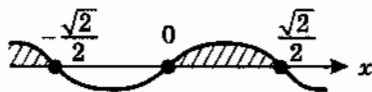
Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$6\sqrt{3}x^3 + 2(\sqrt{3x^2 - 1})^3 = 3\sqrt{3}x;$$

$$2(\sqrt{3x^2 - 1})^3 = 3\sqrt{3}x(1 - 2x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - 2x^2) \geq 0 \\ 4(3x^2 - 1)^3 = 27x^2(1 - 2x^2)^2 \end{cases}$$

Иллюстрируем решение первого неравенства графически:



Учитывая $D(Y)$, находим, что корни уравнения должны лежать в промежутке $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Решая уравнение

$$4(27x^6 - 27x^4 + 9x^2 - 1) = 27x^2(1 - 4x^2 + 4x^4),$$

получаем
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Однако $x = -\frac{2}{3} \notin \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Для проверки первого решения нужно убедиться, что $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. При возведении в квадрат получаем $\frac{1}{3} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ — истина.

Ответ: $x = \frac{2}{3}$.

6. $\sqrt{\frac{x}{4}} + \frac{3x+2}{x+3} = 3.$

Перенесем $\frac{3x+2}{x+3}$ в правую часть уравнения и приведем к общему знаменателю:

$$\sqrt{\frac{x}{4}} = \frac{7}{x+3}. \quad D(Y): x \geq 0$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\frac{x}{4} = \frac{49}{(x+3)^2}; \quad x^3 + 6x^2 + 9x = 196.$$

Обозначим $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 196$.

$f(4) = 0$, т.е. $f(x)$ кратно $(x - 4)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 + 9x - 196 & x - 4 \\ \underline{x^3 - 4x^2} & \\ 10x^2 + 9x & \\ \underline{10x^2 - 40x} & \\ 49x - 196 & \\ \underline{49x - 196} & \end{array}$$

Уравнение примет вид $(x - 4)(x^2 + 10x + 49) = 0$.

1) $x - 4 = 0$; $x = 4 \in (0; \infty)$.

2) уравнение $x^2 + 10x + 49 = 0$ решений не имеет, так как $D < 0$.

Ответ: $x = 4$.

7. $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} = \sqrt[3]{2x-1}$.

Напомним, что $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

После возведения в третью степень частей уравнения получим

$$2x + 1 + 6x + 1 + 3\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{6x+1} (\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1}) = 2x - 1.$$

Перенесем $8x + 2$ в правую часть и заменим

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{6x+1} \text{ на } \sqrt[3]{2x-1}:$$

$$3\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[3]{6x+1} \cdot \sqrt[3]{2x-1} = -3(2x+1).$$

Делим обе части уравнения на 3 и еще раз возводим в третью степень:

$$(2x+1)(6x+1)(2x-1) = -(2x+1)^3;$$

$$\begin{cases} (6x+1)(2x-1) + (2x+1)^2 = 0; \\ 2x+1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть числа $-\frac{1}{2}$ и 0.

После проверки ясно, что число $-\frac{1}{2}$ является корнем

уравнения, а число 0 — нет, так как при $x = 0$ получаем $1 + 1 = -1$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

8. $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$.

Введем подстановку: $\sqrt{x+1} = t \geq 0$.

Тогда $x+1 = t^2$; $2x = 2t^2 - 2$; $2x - 6 = 2t^2 - 8$.

Исходное уравнение примет вид $t - 2 = \sqrt[3]{2t^2 - 8}$.

Возведем в куб обе части уравнения:

$$t^3 - 3t^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 \cdot t - 8 = 2t^2 - 8; \quad t^3 - 8t^2 + 12t = 0;$$
$$t(t^2 - 8t + 12) = 0.$$

Тогда
$$\begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \\ t = 6 \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{x+1} = 2; \\ \sqrt{x+1} = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 35 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-1; 3; 35\}$.

9. $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$.

Введем подстановку: $\sqrt[4]{1-x} = a \geq 0$.

Тогда $1-x = a^4$; $15+x = 16-a^4$.

Напомним, что $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt[4]{16-a^4} = 2-a$, что равносильно

$$\begin{cases} 2-a \geq 0 \\ 16-a^4 = (2-a)^4; \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq 2 \\ 2a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a = 0 \end{cases}$$

В последнем уравнении вынесем $2a$ за скобку и обозначим

$$f(a) = a^3 - 4a^2 + 12a - 16.$$

$f(2) = 0$, т.е. $f(a)$ кратно $(a - 2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 4a^2 + 12a - 16 & a - 2 \\ \underline{a^3 - 2a^2} & \\ -2a^2 + 12a & \\ \underline{-2a^2 + 4a} & \\ 8a - 16 & \\ \underline{8a - 16} & \end{array}$$

Уравнение примет вид

$$2a(a - 2)(a^2 - 2a + 8) = 0; \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \\ a^2 - 2a + 8 = 0 \end{cases}.$$

Уравнение $a^2 - 2a + 8 = 0$ корней не имеет ($D < 0$).

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1-x} = 0 \\ \sqrt[4]{1-x} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -15 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-15; 1\}$.

$$10. \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2} = 3.$$

Введем подстановку:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} = a \geq 0; \quad \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2} = b \geq 0.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{x^2+28^2}+x)x(\sqrt{x^2+28^2}-x)}{x}} = 28. \end{aligned}$$

Тогда можем составить систему уравнений

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ ab = 28 \end{cases}.$$

Решая данную систему, получаем

$$\begin{cases} b = -7 \notin [0; \infty) \\ b = 4, a = 7 \end{cases}.$$

Возвращаемся к переменной x : $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} = 7$.

Возведем в квадрат:

$$\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x} = 49; \quad \sqrt{x^2+28^2} = 48x;$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 28^2 = (48x)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 0 \\ 28^2 = (48x - x)(48x + x) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 7^2 \cdot 4^2 = 49 \cdot 47 \cdot x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x = \frac{4}{47} \sqrt{47} \\ x = -\frac{4}{47} \sqrt{47} \notin (0; \infty) \end{cases} \end{cases}.$$

Ответ: $x = \frac{4\sqrt{47}}{47}$.

Примечание. Если вычислять x относительно b , т.е. решать уравнение $\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2} = 4$, то ответ будет тот же. Проверьте!

$$11. \sqrt[5]{(x-2)(x-32)} - \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1.$$

Введем подстановку:

$$\sqrt[5]{(x-2)(x-32)} = a \text{ и } \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = b \geq 0.$$

Возведем эти выражения в пятую и четвертую степень соответственно. Получим:

$$x^2 - 34x + 64 = a^5; \quad x^2 - 34x + 33 = b^4; \quad a^5 - b^4 = 31.$$

С учетом исходного уравнения получаем систему уравнений: $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^5 - b^4 = 31 \end{cases}; \quad \begin{cases} b = a - 1 \\ a^5 - (a - 1)^4 = 31 \end{cases}.$

Раскроем скобки в последнем уравнении:

$$a^5 - a^4 + 4a^3 - 6a^2 + 4a - 1 = 31;$$

$$a^5 - a^4 + 4a^3 - 6a^2 + 4a - 32 = 0.$$

Введем функцию $f(a) = a^5 - a^4 + 4a^3 - 6a^2 + 4a - 32$.

$f(2) = 0$, т.е. $f(a)$ кратно $(a - 2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r}
 a^5 - a^4 + 4a^3 - 6a^2 + 4a - 32 \quad | \quad a - 2 \\
 \underline{a^5 - 2a^4} \\
 a^4 + 4a^3 \\
 \underline{a^4 - 2a^3} \\
 6a^3 - 6a^2 \\
 \underline{6a^3 - 12a^2} \\
 6a^2 + 4a \\
 \underline{6a^2 - 12a} \\
 16a - 32 \\
 \underline{16a - 32} \\
 0
 \end{array}$$

Получаем $(a - 2)(a^4 + a^3 + 6a^2 + 6a + 16) = 0$.

Тогда $\begin{cases} a = 2 \\ a^4 + a^3 + 6a^2 + 6a + 16 = 0 \end{cases}$.

Последнее уравнение корней не имеет: так как $b \geq 0$, то и $a - 1 \geq 0$, т.е. $a \geq 1$ и $a^4 + a^3 + 6a^2 + 6a + 16 > 0$. Вернемся к переменной x :

$$\sqrt[5]{x^2 - 34x + 64} = 2.$$

Возведем полученное уравнение в пятую степень:

$$x^2 - 34x + 32 = 0; \quad \begin{cases} x = 17 - \sqrt{257} \\ x = 17 + \sqrt{257} \end{cases}.$$

Ответ: $\{17 - \sqrt{257}; 17 + \sqrt{257}\}$.

12. $x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+2x} = 3$.

Введем подстановку: $\sqrt{x} = a \geq 0$ и $\sqrt{x+2} = b \geq 0$.

Тогда $x = a^2$; $x + 2 = b^2$; $b^2 - a^2 = 2$.

Используя исходное уравнение, составим систему

$$\begin{cases} a^2 + a + b + ab = 3 \\ b^2 - a^2 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a(a+b) + (a+b) = 3 \\ (b-a)(b+a) = 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (a+b)(a+1) = 3 \\ (b-a)(a+b) = 2 \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $a + b = \frac{3}{a+1}$. Подставив это значение во второе уравнение, получим

$$\begin{cases} a + b = \frac{3}{a+1} \\ (b-a)\frac{3}{a+1} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a + b = \frac{3}{a+1} \\ 3b - 3a = 2a + 2 \end{cases}.$$

Из второго уравнения найдем $b = \frac{5a+2}{3}$. Подставив это значение в первое уравнение, получим

$$\begin{cases} a + \frac{5a+2}{3} = \frac{3}{a+1} \\ b = \frac{5a+2}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} 3a(a+1) + (5a+2)(a+1) = 9 \\ b = \frac{5a+2}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8a^2 + 10a - 7 = 0 \\ b = \frac{5a+2}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{7}{4} \notin [0; \infty) \\ b = \frac{5a+2}{3} \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$,

т.е. $x = \frac{1}{4}$ — корень данного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{4}$.

$$13. \sqrt{x+1} = \frac{5x^2+20x+16}{x^2+12x+16}.$$

Введем подстановку: $\sqrt{x+1} = t \quad (t \geq 0)$.

Тогда $x = t^2 - 1$.

Исходное уравнение примет вид $t = \frac{5(t^2-1)^2+20(t^2-1)+16}{(t^2-1)^2+12(t^2-1)+16}$;

$$t(t^4 - 2t^2 + 1 + 12t^2 - 12 + 16) =$$

$$= 5(t^4 - 2t^2 + 1) + 20(t^2 - 1) + 16;$$

$$t^5 + 10t^3 + 5t = 5t^4 + 10t^2 + 1;$$

$$t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t - 1 = 0.$$

Напомним, что

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Тогда $(t-1)^5 = 0$; $t = 1 \in [0; \infty)$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{x+1} = 1; \quad x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

$$14. \sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}.$$

$$D(y) = [1; 3].$$

Для решения данного уравнения не существует рациональных приемов. Попробуем найти корни методом подбора. Исходя из $D(y)$, проверим, является ли корнем $x = 2$.

$$\sqrt[4]{2-1} + 2\sqrt[3]{3 \cdot 2 + 2} = 4 + \sqrt{3-2}; \quad 5 = 5 \text{ — истина.}$$

Рассмотрим, существуют ли другие корни.

$$\text{Пусть } f(x) = \sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2}.$$

$$\text{Тогда } f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-1)^3}} + \frac{2 \cdot 3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}.$$

$f'(x) > 0$ для любого $x \in (1; 3]$, т.е. $f(x)$ на промежутке $(1; 3]$ возрастает.

$$\text{Пусть } \varphi(x) = 4 + \sqrt{3-x}, \text{ тогда } \varphi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

$\varphi'(x) < 0$ для любого $x \in [1; 3)$, т.е. $\varphi(x)$ на промежутке $[1; 3)$ убывает.

Известно, что возрастающая и убывающая функции, если и пересекаются, то только в одной точке.

Ответ: $x = 2$.

$$15. \sqrt{\frac{1}{3}-x} + x - 1 = \sqrt{x-\frac{1}{4}} + \sqrt{x-\frac{1}{6}}.$$

$$D(y): \begin{cases} \frac{1}{3} - x \geq 0 \\ x - \frac{1}{4} \geq 0; \\ x - \frac{1}{6} \geq 0 \end{cases}$$

$$D(y) = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right].$$

Для решения исходного уравнения применим метод оценок левой и правой его частей.

$$\text{Так как } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}, \text{ то } -\frac{3}{4} \leq x - 1 \leq -\frac{2}{3}. \quad (1)$$

$$\text{Аналогично из } -\frac{1}{3} \leq -x \leq -\frac{1}{4} \text{ следует } 0 \leq -x + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{12}.$$

$$\text{Значит } 0 \leq \sqrt{\frac{1}{3}-x} \leq \sqrt{\frac{1}{12}}. \quad (2)$$

Складывая неравенства (1) и (2), для левой части уравнения получаем

$$0 - \frac{3}{4} \leq \sqrt{\frac{1}{3}-x} + x - 1 \leq -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{12}}.$$

$$\text{Тогда } \sqrt{\frac{1}{3}-x} + x - 1 < 0.$$

Так как $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}$, то для правой части уравнения

$$\sqrt{x - \frac{1}{4}} + \sqrt{x - \frac{1}{6}} \geq 0.$$

Левая и правая части уравнения имеют разные знаки, следовательно, уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

$$16. \sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x + 1}} = 4.$$

Введем подстановки:

$$\sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} = a \text{ и } \sqrt[3]{7 + \sqrt{x + 1}} = b.$$

Тогда: $a^3 = 9 - \sqrt{x + 1}$; $b^3 = 7 + \sqrt{x + 1}$; $a^3 + b^3 = 16$.

С учетом исходного уравнения получаем систему

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 + b^3 = 16 \end{cases}; \quad \begin{cases} a + b = 4 \\ (a + b)((a + b)^2 - 3ab) = 16 \end{cases}.$$

Подставляя во второе уравнение $(a + b) = 4$, получаем

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 4(16 - 3ab) = 16 \end{cases}; \quad \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 4 \end{cases}.$$

Из теоремы, обратной теореме Виета, следует $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} = 2, \text{ т. е. } x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

$$17. \sqrt[3]{2 - x} = 2 - x^3.$$

Введем подстановку: $y = \sqrt[3]{2 - x}$.

Производная $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}} < 0$ для любого $x \neq 2$, следовательно,

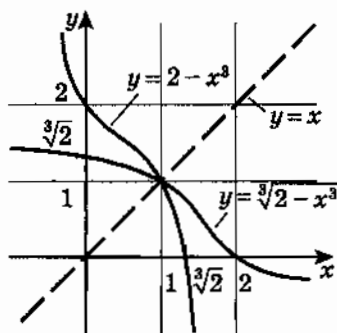
$y = \sqrt[3]{2 - x}$ — функция, монотонно убывающая, и каждое свое значение функция принимает только один раз. Тогда для нее существует обратная функция: $x = \sqrt[3]{2 - y}$ и, значит, $x^3 = 2 - y$; $y = 2 - x^3$.

В данном случае имеем уравнение, связанное с равенством взаимно обратных функций. Известно, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов, задаваемой уравнением $y = x$.

Если графики этих функций пересекаются, то хотя бы одна точка пересечения принадлежит прямой $y = x$, т. е. $2 - x^3 = x$; $x^3 + x - 2 = 0$; $(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$.

Следовательно, $x = 1$ и других решений нет.

Графическое решение:



Ответ: $x = 1$.

$$18. 3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x + 18} - 2|.$$

Пусть $f(x) = 3x - 2|x - 2|$.

Если проанализировать структуру правой части, то становится ясно — это та же самая функция, только вместо аргумента x использован аргумент $\sqrt{3x + 18}$.

Таким образом, $f(x) = f(\sqrt{3x + 18})$.

«Раскроем» модуль, используя определение модуля.

$$\text{Тогда } 3x - 2|x - 2| = \begin{cases} x + 4, & x \geq 2 \\ 5x - 4, & x < 2 \end{cases}.$$

Функция $f(x)$ возрастает на каждом из лучей: $[2; \infty)$ и $(-\infty; 2)$. Отсюда следует, что $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а это значит, что каждое свое значение она принимает только один раз.

Следовательно, $f(x) = f(\sqrt{3x + 18})$ выполняется лишь

$$\text{при } x = \sqrt{3x + 18} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 3x + 18 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 6 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 6$.

Самостоятельная работа 2**Вариант 1**

$$1. \sqrt{3x} - \sqrt{x - \frac{1}{36}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$2. x^2 - x - 2\sqrt{x^2 - x + 4} = 4.$$

$$3. \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}} + 16\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} = 8.$$

$$4. 2x^2 - x + 1 = 2x\sqrt{\frac{2x-1}{x}}.$$

$$5. \sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}} = 1.$$

$$6. \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}.$$

$$7. \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \frac{7}{5} - \frac{2}{\sqrt{x^2+4x+29}}.$$

$$8. \sqrt[3]{25+x} - 6 = \sqrt[3]{x-29}.$$

$$9. \sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2-7x} = 3.$$

$$10. \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3.$$

Вариант 2

$$1. \sqrt{15x} - \sqrt{5x - \frac{1}{36}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$2. x^2 + x - 4 = 2\sqrt{x^2 + x + 4}.$$

$$3. \sqrt{\frac{x-2}{2x+1}} + 16\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}} = 8.$$

$$4. 2x^2 + x + 1 + 2x\sqrt{\frac{2x+1}{x}} = 0.$$

$$5. \sqrt{5-x-4\sqrt{1-x}} + \sqrt{10-x-6\sqrt{1-x}} = 1.$$

$$6. \sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{-x^2 - 4x - 3} = \sqrt{-x^2 - 3x - 2}.$$

$$7. \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{7}{5} - \frac{2}{\sqrt{x^2-4x+29}}.$$

$$8. \sqrt[3]{29+x} - 6 = \sqrt[3]{x-25}.$$

$$9. \sqrt{24+2x-x^2} + \sqrt{x^2-9x+8} = 3.$$

$$10. \sqrt{1-x} - 3 = \sqrt[3]{x+2}.$$

2

Иррациональные неравенства

Основные свойства

1) Если $\sqrt{a} < b$, то $\begin{cases} b \geq 0 \\ a \geq 0 \\ a < b^2 \end{cases}$.

2) Если $\sqrt{a} > b$, то $\begin{cases} b \geq 0 \\ a > b^2 \\ b < 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$.

3) Если $a\sqrt{b} \leq 0$, то $\begin{cases} ab^2 \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

4) Если $a\sqrt{b} \geq 0$, то $\begin{cases} ab^2 \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

5) Если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $\begin{cases} b \geq 0 \\ a > b \end{cases}$.

6) Если $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, то $\begin{cases} a \geq 0 \\ a < b \end{cases}$.

7) Если $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$, то $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \\ a + 2\sqrt{ab} + b > c \end{cases}$.

8) Если $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{c}$, то $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \\ a + 2\sqrt{ab} + b < c \end{cases}$.

Примеры решения иррациональных неравенств

Практикум 4

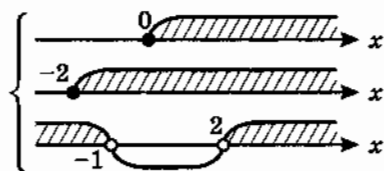
Рассмотрим решения некоторых простейших иррациональных неравенств.

1. $\sqrt{x+2} < x$.

Данное неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x+2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -2 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}.$$

Ясно, что решениями уравнения $x^2 - x - 2 = 0$ являются числа -1 и 2 .



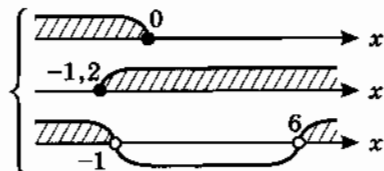
Ответ: $(2; \infty)$.

2. $\sqrt{5x+6} < -x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств (по I свойству):

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 5x+6 \geq 0 \\ 5x+6 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -1,2 \\ x^2 - 5x - 6 > 0 \end{cases}.$$

Решим уравнение $x^2 - 5x - 6 = 0$ и представим решения неравенств графически:

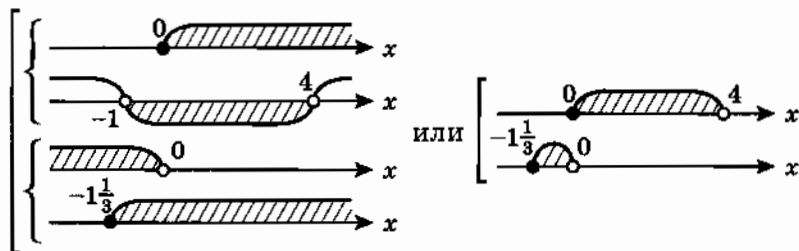


Ответ: $[-1,2; -1)$.

3. $\sqrt{3x+4} > x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств (по II свойству):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x+4 > x^2 \\ x < 0 \\ 3x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x < 0 \\ x \geq -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

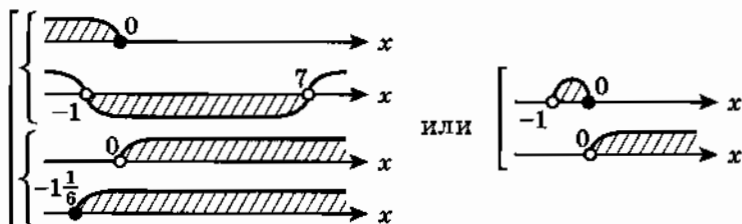


Ответ: $[-1\frac{1}{3}; 4)$.

4. $\sqrt{6x+7} > -x$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 6x+7 > (-x)^2 \\ -x < 0 \\ 6x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 6x - 7 < 0 \\ x > 0 \\ x \geq -1\frac{1}{6} \end{cases}$$

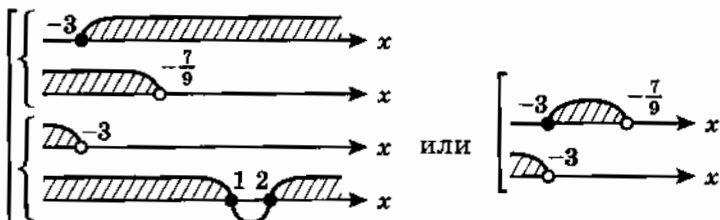


Ответ: $(-1; \infty)$.

5. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > (x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < -\frac{7}{9} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ (x - 1)(x - 2) \geq 0 \end{cases}$$

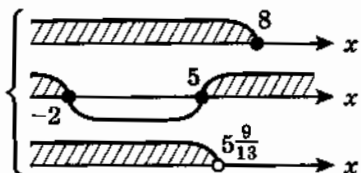


Ответ: $(-\infty; -\frac{7}{9})$.

6. $\sqrt{(x + 2)(x - 5)} < 8 - x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ (x + 2)(x - 5) \geq 0 \\ (x + 2)(x - 5) < (8 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ (x + 2)(x - 5) \geq 0 \\ 13x < 74 \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -2] \cup [5; \frac{59}{13})$.

7. $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} - \sqrt{2 - x} > 0$.

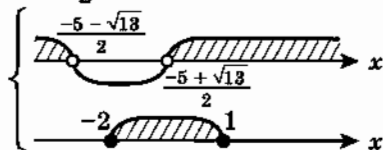
Перенесем $\sqrt{2 - x}$ в правую часть. Получаем

$$\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} > \sqrt{2 - x}.$$

Это неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 4 - \sqrt{1 - x} > 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \sqrt{1 - x} < 2 + x \end{cases}; \begin{cases} x \leq 2 \\ 2 + x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - x < (2 + x)^2 \end{cases}.$$

В последнем неравенстве перенесем $(1 - x)$ в правую часть, раскроем скобки, получим $x^2 + 5x + 3 > 0$. Числа $\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$ и $\frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$ являются корнями уравнения $x^2 + 5x + 3 = 0$.



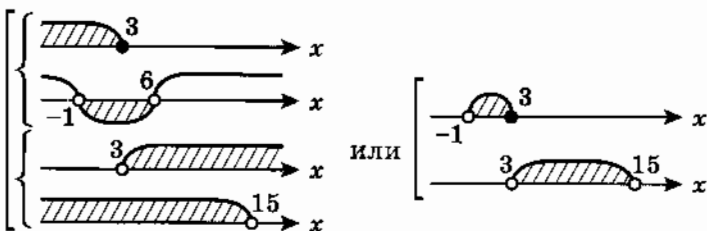
Ответ: $\left(\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; 1\right]$.

8. $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt{15-x} > 3-x \\ x \neq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 15-x > (3-x)^2 \\ x \neq 15 \end{cases}.$$

То есть $\begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 5x - 6 < 0 \\ x \neq 15 \end{cases}.$



Ответ: $(-1; 15)$.

$$9. \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} > -1.$$

Так как левая часть неравенства неотрицательна, то на области существования корней левой части неравенство верно из-за того, что правая часть неравенства отрицательна.

$$\text{Итак, } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \quad [-2; 3].$$

Ответ: $[-2; 3]$.

$$10. \sqrt{x+6} > \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-5}.$$

Данное неравенство равносильно по свойству 8 системе неравенств:

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \end{cases};$$

$$x+6 > x+7 + 2\sqrt{(x+7)(2x-5)} + 2x-5$$

$$\begin{cases} x \geq 2,5 \\ \sqrt{(x+7)(2x-5)} < 2-x \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 2,5 \\ 2-x \geq 0 \\ (x+7)(2x-5) \geq 0 \\ (x+7)(2x-5) < (2-x)^2 \end{cases} \quad \emptyset.$$

Отсюда следует, что неравенство решений не имеет.

Ответ: решения нет.

$$11. \sqrt{3-x} + \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$3-x + 2\sqrt{(3-x)(x+1)} + x+1 > \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \end{cases}.$$

$$2\sqrt{(3-x)(x+1)} > -3\frac{3}{4}$$

Последнее неравенство верно для любого $-1 \leq x \leq 3$.

Ответ: $[-1; 3]$.

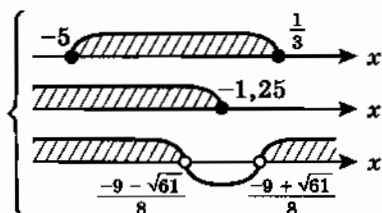
12. $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$.

Перенесем $\sqrt{5+x}$ в правую часть, тогда неравенство $\sqrt{1-3x} > 1 + \sqrt{5+x}$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ 5+x \geq 0 \\ 1-3x > 1+2\sqrt{5+x}+5+x \end{cases}; \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ x \geq -5 \\ 2\sqrt{5+x} < -4x-5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ x \geq -5 \\ -4x-5 \geq 0 \\ 4(x+5) < 16x^2+40x+25 \end{cases}; \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ x \geq -5 \\ x \leq -1,25 \\ 16x^2+36x+5 > 0 \end{cases}.$$

Числа $\frac{-9+\sqrt{61}}{8}$ и $\frac{-9-\sqrt{61}}{8}$ являются решениями уравнения $16x^2+36x+5=0$.



Ответ: $\left[-5; \frac{-9+\sqrt{61}}{8}\right)$.

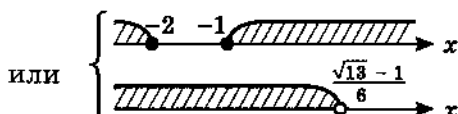
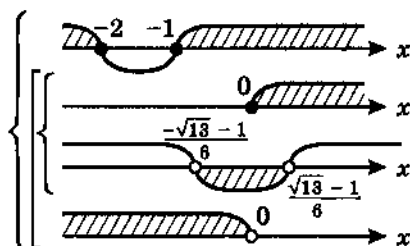
13. $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$.

Перенесем $\sqrt{x^2-x+1}$ в правую часть, тогда неравенство $\sqrt{x^2+3x+2} < 1 + \sqrt{x^2-x+1}$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+3x+2 \geq 0 \\ x^2-x+1 \geq 0 \\ x^2+3x+2 < 1+2\sqrt{x^2-x+1}+x^2-x+1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x+1)(x+2) \geq 0 \\ \sqrt{x^2-x+1} > 2x; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x+2) \geq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 > 4x^2; \end{array} \right. \\ x < 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x+2) \geq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 3x^2 + x - 1 < 0; \end{array} \right. \\ x < 0 \end{array} \right.$$



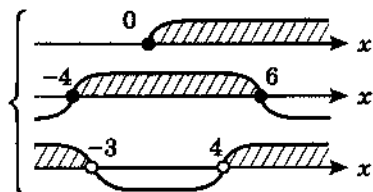
Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-1; \frac{\sqrt{13}-1}{6})$.

14. $\sqrt{24 + 2x - x^2} < x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 24 + 2x - x^2 \geq 0; \\ 24 + 2x - x^2 < x^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ -(x-6)(x+4) \geq 0. \\ (x-4)(x+3) > 0 \end{array} \right.$$



Ответ: $(4; 6]$.

15. $(x+2)\sqrt{9-x^2} \geq 0$. Используем свойство 4.

Напомним, что $a\sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab^2 \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

Получаем $\begin{cases} (x+2)(9-x^2)^2 \geq 0; \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} (x+2)(3-x)^2(x+3)^2 \geq 0 \\ (3-x)(3+x) \geq 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{График 1: } x \text{ от } -3 \text{ до } 3, \text{ с выколотой точкой в } -2. \\ \text{График 2: } x \text{ от } -3 \text{ до } 3. \end{array} \right.$$

Ответ: $[-2; 3] \cup \{-3\}$.

16. $2\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} < 3$.

Введем подстановку $\sqrt{x} = t$, $t \geq 0$. Тогда $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{t}$.

Получаем $2t + \frac{1}{t} < 3$; $\frac{2t^2 - 3t + 1}{t} < 0$; $\frac{2(t-1)(t-\frac{1}{2})}{t} < 0$.

$$\text{График: } t \text{ от } 0 \text{ до } 1, \text{ с выколотой точкой в } \frac{1}{2}. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 1 \\ \sqrt{x} < 0 \text{ } (\emptyset); \end{array} \right. \quad \frac{1}{4} < x < 1.$$

Ответ: $(\frac{1}{4}; 1)$.

17. $\sqrt{4x^2 - 15x + 14} \leq \sqrt{8x - 5x^2}$.

По свойству 6 $\begin{cases} 4x^2 - 15x + 14 \geq 0 \\ 4x^2 - 15x + 14 \leq 8x - 5x^2 \end{cases}$;

$$\begin{cases} 4x^2 - 15x + 14 \geq 0 \\ 9x^2 - 23x + 14 \leq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x-2)(x-1\frac{3}{4}) \geq 0 \\ (x-1)(x-1\frac{5}{9}) \leq 0 \end{cases}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{График 1: } x \text{ от } 1\frac{3}{4} \text{ до } 2, \text{ с выколотой точкой в } 1\frac{3}{4}. \\ \text{График 2: } x \text{ от } 1 \text{ до } 1\frac{5}{9}, \text{ с выколотой точкой в } 1\frac{5}{9}. \end{array} \right. \quad [1; 1\frac{5}{9}]$$

Ответ: $[1; 1\frac{5}{9}]$.

Тренировочная работа 4

Решите неравенства 1–12.

1. $\sqrt{2-x} < -x.$

2. $\sqrt{6-5x} < x.$

3. $\sqrt{4-3x} > x.$

4. $\sqrt{x^2+3x+2} > 3-x.$

5. $\sqrt{2-\sqrt{x+3}} < \sqrt{x+4}.$

6. $\sqrt{4-x^2} + x + 1 > 0.$

7. $\sqrt{x^2-5x+6} \leq x+4.$

8. $\sqrt{\frac{9}{x^2}-3} > 1 + \frac{3}{x}.$

9. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \leq 1.$

10. $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}} \geq \frac{7}{12}.$

11. $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} \leq x + 1.$

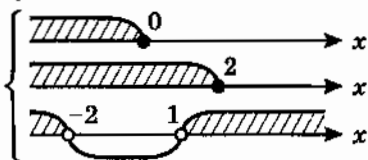
12. $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 \leq 3x + 7.$

Решение тренировочной работы 4

1. $\sqrt{2-x} < -x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 2-x < x^2 \end{cases} \quad \text{Следовательно,} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}.$$

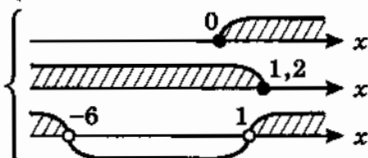


Ответ: $(-\infty; -2)$.

2. $\sqrt{6-5x} < x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 6-5x \geq 0 \\ 6-5x < x^2 \end{cases} \quad \text{Следовательно,} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1,2 \\ x^2 + 5x - 6 > 0 \end{cases}.$$

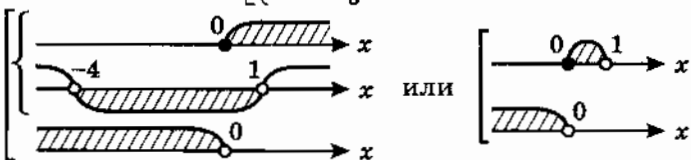


Ответ: $(1; 1,2]$.

3. $\sqrt{4-3x} > x$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4-3x > x^2 \\ x < 0 \\ 4-3x \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \\ x < 0 \\ x \leq 1\frac{1}{3} \end{cases}.$$



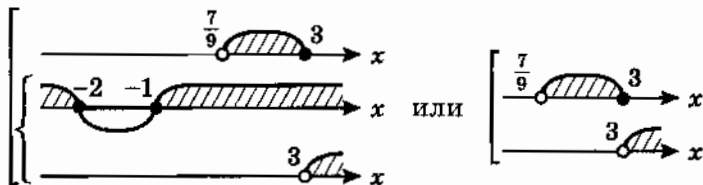
Ответ: $(-\infty; 1)$.

4. $\sqrt{x^2 + 3x + 2} > 3 - x$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 - x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 > (3 - x)^2 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3 \\ x > \frac{7}{9} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 - x < 0 \\ x^2 + 3x + 2 \geq 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ (x + 1)(x + 2) \geq 0 \end{array} \right.$$



Ответ: $(\frac{7}{9}; \infty)$.

5. $\sqrt{2 - \sqrt{x + 3}} < \sqrt{x + 4}$.

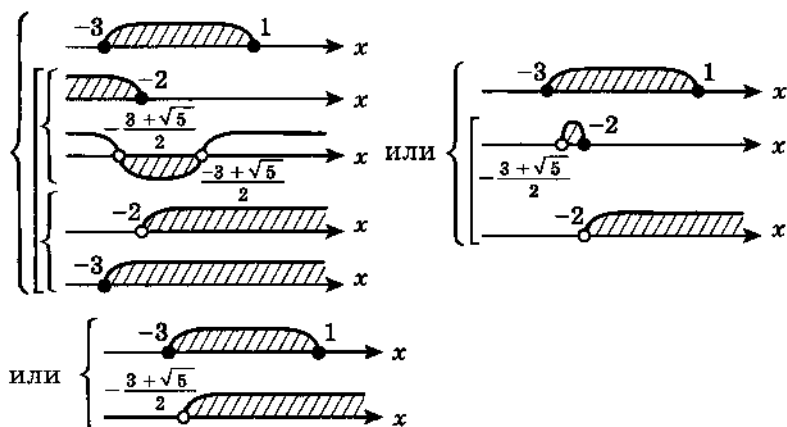
Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - \sqrt{x + 3} \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \\ 2 - \sqrt{x + 3} < x + 4 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x + 3} \leq 2 \\ x \geq -4 \\ \sqrt{x + 3} > -x - 2 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3 \geq 0 \\ x + 3 \leq 4 \\ x \geq -4 \\ \left\{ \begin{array}{l} -x - 2 \geq 0 \\ x + 3 > (x + 2)^2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -x - 2 < 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x \leq 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq -2 \\ x^2 + 3x + 1 < 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x > -2 \\ x \geq -3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Убеждаемся, что числа $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ являются корнями уравнения $x^2 + 3x + 1 = 0$.



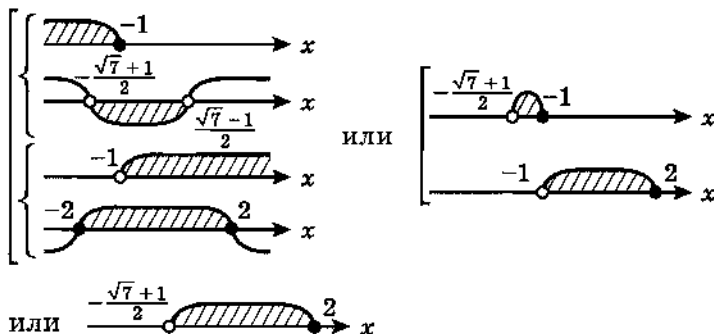
Ответ: $\left[-\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 1\right]$.

6. $\sqrt{4-x^2} + x + 1 > 0$.

Перенесем $x+1$ в правую часть: $\sqrt{4-x^2} > -x-1$, тогда

$$\begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ 4-x^2 > (-x-1)^2 \\ -x-1 < 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ 2x^2+2x-3 < 0 \\ x > -1 \\ (2+x)(2-x) \geq 0 \end{cases}$$

Числа $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ являются решениями уравнения $2x^2+2x-3=0$.

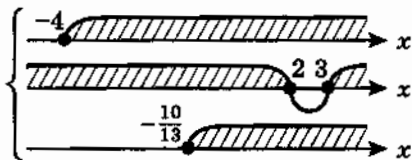


Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{7}+1}{2}; 2\right]$.

7. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq x + 4$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leq x^2 + 8x + 16 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -4 \\ (x - 2)(x - 3) \geq 0 \\ x \geq -\frac{10}{18} \end{cases}$$

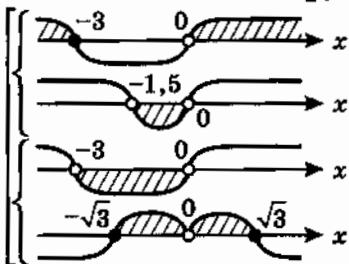


Ответ: $[-\frac{10}{18}; 2] \cup [3; \infty)$.

8. $\sqrt{\frac{9}{x^2} - 3} > 1 + \frac{3}{x}$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} 1 + \frac{3}{x} \geq 0 \\ \frac{9}{x^2} - 3 > \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 \\ 1 + \frac{3}{x} < 0 \\ \frac{9}{x^2} - 3 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x+3}{x} \geq 0 \\ \frac{9}{x^2} - 3 > 1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} \\ \frac{x+3}{x} < 0 \\ \frac{3(3-x^2)}{x^2} \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x+3}{x} \geq 0 \\ \frac{4x+6}{x} < 0 \\ \frac{x+3}{x} < 0 \\ \frac{3(3-x^2)}{x^2} \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $[-\sqrt{3}; 0)$.

9. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \leq 1$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x - 1 + 2\sqrt{x^2 + x - 2} + x + 2 \leq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + x - 2} \leq -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ -x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq x^2 \end{cases}.$$

Неравенство решения не имеет.

Ответ: решений нет.

10. $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}} \geq \frac{7}{12}.$

Введем подстановку: $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} = t > 0.$

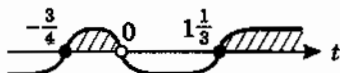
Исходное неравенство примет вид:

$$t - \frac{1}{t} \geq \frac{7}{12}; \quad \frac{12t^2 - 7t - 12}{t} \geq 0.$$

Числа $\frac{4}{3}$ и $-\frac{3}{4}$ являются корнями уравнения

$$12t^2 - 7t - 12 = 0.$$

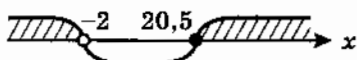
Исходное неравенство принимает вид: $\frac{(3t-4)(4t+3)}{t} \geq 0.$



$[-\frac{3}{4}; 0) \cup (0; \infty)$, так как $t > 0$; следовательно, $t \geq \frac{4}{3}.$

Возвращаемся к переменной x :

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} \geq \frac{4}{3}; \quad \frac{2x-1}{x+2} \geq \frac{16}{9}; \quad \frac{2x-41}{9(x+2)} \geq 0.$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup [20,5; \infty).$

11. $\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2 + 1} \leq x + 1.$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x + \sqrt{6x^2 + 1} \geq 0 \\ 2x + \sqrt{6x^2 + 1} \leq x^2 + 2x + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{6x^2 + 1} \geq -2x \\ \sqrt{6x^2 + 1} \leq x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Самостоятельная работа 3**Вариант 1**

1. $\sqrt{x^2 - x} < \frac{6}{\sqrt{x^2 - x}}.$

2. $\sqrt{5x + 6} < -x.$

3. $\sqrt{x^2 + 3x + 2} > 3 - x.$

4. $(8x^2 - 6x + 1)\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \geq 0.$

5. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 15} < 5.$

6. $\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leq \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}.$

7. $\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{x} \geq 1.$

8. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}} - \frac{7}{12} \geq \sqrt{\frac{x-2}{2x+1}}.$

9. $\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x \leq 7 - x^2.$

10. $3 - x + 2\sqrt{3x - 2} \geq \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{\sqrt{3x + 2}}.$

Вариант 2

1. $\frac{1}{6}\sqrt{x^2 + x} < \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}.$

2. $\sqrt{6 - 5x} < x.$

3. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3.$

4. $\frac{\sqrt{-25x^2 - 15x - 2}}{8x^2 + 6x + 1} \geq 0.$

5. $\sqrt{15 - x} + \sqrt{-2x - 1} < 5.$

6. $\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-8} \geq \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{2x-1}.$

7. $\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{x} \leq -1.$

8. $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} - \frac{7}{12} \geq \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$

9. $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 \leq 7 + 3x.$

10. $x + 3 + 2\sqrt{-3x - 2} \geq \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{\sqrt{2 - 3x}}.$

Примеры решения более сложных иррациональных неравенств

Практикум 5

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} > \sqrt{8x-5}$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

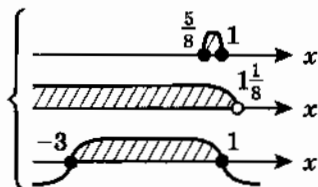
$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 8x-5 \geq 0 \end{cases};$$

$$x+3+2\sqrt{(x+3)(1-x)}+1-x > 8x-5$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{8} \\ x \leq 1 \\ 2\sqrt{(x+3)(1-x)} > 8x-9 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{5}{8} \leq x \leq 1 \\ 8x-9 < 0 \\ 4(x+3)(1-x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{8} \leq x \leq 1 \\ 8x-9 \geq 0 \\ 4(x+3)(1-x) > (8x-9)^2 \end{cases} \quad \emptyset$$

Последняя система неравенств решений не имеет.



Ответ: $[\frac{5}{8}; 1]$.

2. $\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \frac{1}{x}$.

Слагаемые левой части умножим и разделим на выражения, сопряженные знаменателям:

$$\frac{2(2-\sqrt{4-x^2})}{(2+\sqrt{4-x^2})(2-\sqrt{4-x^2})} + \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{(2+\sqrt{4-x^2})(2-\sqrt{4-x^2})} > \frac{1}{x};$$

$$\frac{4-2\sqrt{4-x^2}+2+\sqrt{4-x^2}}{4-4+x^2} > \frac{1}{x}.$$

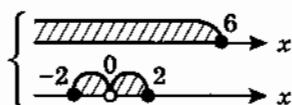
Перенесем $\frac{1}{x}$ в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{6-\sqrt{4-x^2}-x}{x^2} > 0.$$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2} < 6-x; \\ x \neq 0 \\ x \leq 6 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 16 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Неравенство $x^2 - 6x + 16 > 0$ верно для любого x , так как $a = 1 > 0$, $D < 0$.



Ответ: $[-2; 0) \cup (0; 2]$.

$$3. (x-3)\sqrt{x^2-4} \leq x^2-9.$$

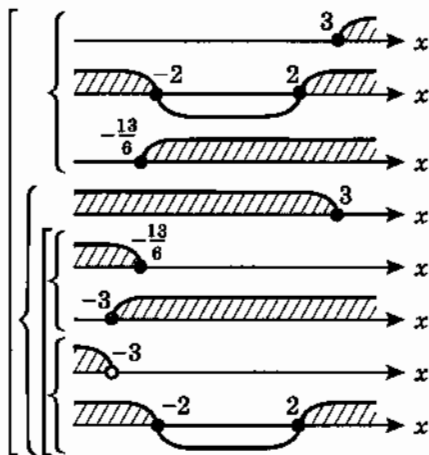
Перенесем (x^2-9) в левую часть и вынесем $(x-3)$ за скобку: $(x-3)(\sqrt{x^2-4} - (x+3)) \leq 0$.

$$\text{Напомним: } a \cdot b \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}.$$

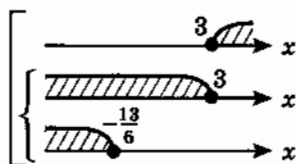
$$\text{Тогда } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ \sqrt{x^2-4} \leq x+3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-3 \leq 0 \\ \sqrt{x^2-4} \geq x+3 \end{cases};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 \leq x^2 + 6x + 9 \\ x \leq 3 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ (x-2)(x+2) \geq 0 \\ x \geq -\frac{13}{6} \\ x \leq 3 \end{array} \right. ;$$

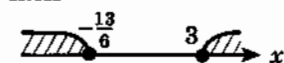
$$\left\{ \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ x^2 - 4 \geq x^2 + 6x + 9 \\ x+3 < 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x \leq -\frac{13}{6} \\ x < -3 \\ (x-2)(x+2) \geq 0 \end{array} \right.$$



ИЛИ



ИЛИ



Ответ: $(-\infty; -2\frac{1}{6}] \cup [3; \infty)$.

4. $\sqrt{-25x^2 + 15x - 2}(8x^2 - 6x + 1) \geq 0$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \geq 0 \\ 8x^2 - 6x + 1 \geq 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} -25x^2 + 15x - 2 \geq 0 \\ 8x^2 - 6x + 1 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \leq 0 \\ 8x^2 - 6x + 1 \leq 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} -25x^2 + 15x - 2 = 0 \\ 8x^2 - 6x + 1 \leq 0 \end{array} \right.$$

Числа $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{5}$ являются решениями уравнения

$25x^2 - 15x + 2 = 0$, а числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ — решениями уравнения $8x^2 - 6x + 1 = 0$. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} -25\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) \geq 0 \\ 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{5} \\ x = \frac{1}{5} \end{array} \right. \\ 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \text{График 1: } x \text{ от } \frac{1}{5} \text{ до } \frac{2}{5} \text{ (затенено)} \\ \text{График 2: } x \text{ от } \frac{1}{4} \text{ до } \frac{1}{2} \text{ (затенено)} \\ \text{График 3: } x \text{ от } \frac{1}{5} \text{ до } \frac{2}{5} \text{ (точки)} \\ \text{График 4: } x \text{ от } \frac{1}{4} \text{ до } \frac{1}{2} \text{ (затенено)} \end{array} \right. \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{4} \right] \cup \left\{ \frac{2}{5} \right\}.$$

Примечание. Возможен и другой способ решения исходного неравенства.

Напомним, что по свойству 4

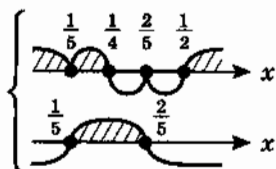
$$b\sqrt{a} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ba^2 \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}.$$

Получаем:

$$\sqrt{-25x^2 + 15x - 2}(8x^2 - 6x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-25x^2 + 15x - 2)^2(8x^2 - 6x + 1) \geq 0; \\ -25x^2 + 15x - 2 \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 25^2\left(x - \frac{2}{5}\right)^2\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 \cdot 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \geq 0 \\ -25\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) \geq 0 \end{cases}.$$



Ответ: $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{4} \right] \cup \left\{ \frac{2}{5} \right\}.$

$$5. \sqrt{|1 - 8x| - 2} \leq x + 1.$$

Напомним свойства модульных неравенств:

$$а) |\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta \\ \alpha > -\beta \end{cases};$$

$$б) |\alpha| > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta \end{cases},$$

$$\text{а также } |a - b| = |b - a|.$$

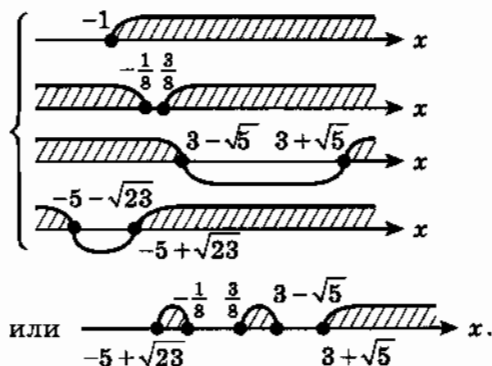
Тогда исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ |8x - 1| \geq 2 \\ |8x - 1| - 2 \leq x^2 + 2x + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ |8x - 1| \geq 2 \\ |8x - 1| \leq x^2 + 2x + 3 \end{cases}.$$

«Раскроем» модули:

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 8x - 1 \geq 2 \\ 8x - 1 \leq -2 \\ 8x - 1 \leq x^2 + 2x + 3 \\ 8x - 1 \geq -x^2 - 2x - 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq \frac{3}{8} \\ x \leq -\frac{1}{8} \\ x^2 - 6x + 4 \geq 0 \\ x^2 + 10x + 2 \geq 0 \end{cases}.$$

Числа $3 + \sqrt{5}$ и $3 - \sqrt{5}$ — решения уравнения $x^2 - 6x + 4 = 0$; числа $-5 + \sqrt{23}$ и $-5 - \sqrt{23}$ — решения уравнения $x^2 + 10x + 2 = 0$.



$$\text{Ответ: } [-5 + \sqrt{23}; -\frac{1}{8}] \cup [\frac{3}{8}; 3 - \sqrt{5}] \cup [3 + \sqrt{5}; \infty).$$

$$6. \sqrt{x+1} - \sqrt{3x} > 2x - 1.$$

$D(H)$ — область определения неравенства: $D(H) = [0; \infty)$.

Перенесем $\sqrt{3x}$ в правую часть, а число 1 — в левую. Полученное неравенство $\sqrt{x+1} + 1 > 2x + \sqrt{3x}$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} (\sqrt{x+1} + 1)^2 > (2x + \sqrt{3x})^2; \\ x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{x+1} + 2 > 4x^2 + 4x\sqrt{3x} + 3x; \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Похоже, данный способ решения не эффективен и технически очень сложен.

Попробуем другой подход — введем подстановку:

$$\sqrt{x+1} = t \geq 0.$$

$$\text{Тогда } x+1 = t^2; \quad x = t^2 - 1; \quad 2x = 2(t^2 - 1);$$

$$3x = 3(t^2 - 1).$$

Неравенство примет вид

$$t + 1 > 2(t^2 - 1) + \sqrt{3(t^2 - 1)};$$

$$-2t^2 + t + 3 > \sqrt{3(t^2 - 1)},$$

что равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -2t^2 + t + 3 \geq 0 \\ t^2 - 1 \geq 0 \\ ((-2t^2 + t + 3)^2 > 3(t^2 - 1) \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} \text{ и } -1 \text{ — корни уравнения } -2t^2 + t + 3 = 0.$$

В последнем неравенстве системы раскрываем скобки:

$$\begin{cases} -2\left(t - \frac{3}{2}\right)(t + 1) \geq 0 \\ (t - 1)(t + 1) \geq 0 \\ 4t^4 + t^2 + 9 - 4t^3 - 12t^2 + 6t > 3t^2 - 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -(t - \frac{3}{2})(t + 1) \geq 0 \\ (t - 1)(t + 1) \geq 0 \\ 4t^4 - 4t^3 - 14t^2 + 6t + 12 > 0 \end{cases}$$

Этот способ решения также становится очень сложным технически.

Попробуем проанализировать знаки левой и правой частей исходного неравенства:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} > 2x - 1. \quad (1)$$

- 1) Пусть $\sqrt{x+1} > \sqrt{3x}$ и $2x - 1 > 0$. Это равносильно системе

$$\begin{cases} 3x \geq 0 \\ x + 1 > 3x \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Очевидно, что полученная система неравенств решений не имеет.

- 2) Пусть $\sqrt{x+1} > \sqrt{3x}$ и $2x - 1 < 0$, что равносильно системе

$$\begin{cases} 3x \geq 0 \\ x + 1 > 3x \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Решением системы является промежуток $[0; \frac{1}{2})$.

В этом случае $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} > 0$; $2x - 1 < 0$.

Следовательно, $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} > 2x - 1$ для любого $x \in [0; \frac{1}{2})$.

- 3) Пусть $\sqrt{x+1} < \sqrt{3x}$ и $2x - 1 > 0$, что противоречит исходному неравенству (1), и равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 1 < 3x \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Тогда $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} < 0$, $2x - 1 > 0$.

Получили ложное утверждение: отрицательное число больше положительного.

4) При $x = \frac{1}{2}$, $0 > 0$ — решений нет.

Ответ: $\left[0; \frac{1}{2}\right)$.

Примечание. Иногда логический анализ более эффективен, чем технические приемы.

$$7. \frac{1}{4}x > (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1).$$

Умножим и разделим правую часть неравенства на $(\sqrt{1+x} + 1)$:

$$\frac{1}{4}x > \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1+x}+1};$$

$$\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x} + 1) > (1+x-1)(\sqrt{1-x} + 1);$$

$$\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x} + 1) > x(\sqrt{1-x} + 1).$$

Перенесем $x(\sqrt{1-x} + 1)$ в левую часть неравенства, умножим его на 4, вынесем x за скобку:

$$x(\sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} - 3) > 0.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{1+x} > 4\sqrt{1-x} + 3; \\ x < 0 \\ \sqrt{1+x} < 4\sqrt{1-x} + 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ 1+x > 16(1-x) + 24\sqrt{1-x} + 9 \\ x < 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ 1+x < 16(1-x) + 24\sqrt{1-x} + 9 \end{cases}.$$

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ 24\sqrt{1-x} < 17x - 24 \\ -1 \leq x < 0 \\ 24\sqrt{1-x} > 17x - 24 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ 17x \geq 24 \\ 24^2(1-x) < (17x-24)^2 \quad \emptyset. \\ -1 \leq x < 0 \\ 1-x \geq 0 \end{array} \right.$$

Первая система неравенств решений не имеет.

Решением второй системы неравенств является любое значение $x \in [-1; 0)$.

Ответ: $[-1; 0)$.

$$8. \frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 0.$$

Выполним подстановку $\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} = t \geq 0$.

Тогда $\sqrt{\frac{12x}{x-2}} = t^2$, $\frac{12x}{x-2} = t^4$.

Исходное неравенство примет вид

$$\frac{1}{2}t^4 - t^2 - 2t > 0.$$

Умножая на 2, получаем $t^4 - 2t^2 - 4t > 0$.

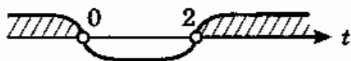
Пусть $f(t) = t^3 - 2t - 4$.

$f(2) = 0$, т.е. $f(t)$ кратно $(t-2)$.

Получаем: $t(t-2)(t^2+2t+2) > 0$.

Так как $t^2+2t+2 > 0$ ($t > 0$),

получаем: $t(t-2) > 0$.



Поскольку $t \geq 0$, то решением неравенства является промежуток $(2; \infty)$.

Возвратимся к переменной x :

$$\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 2; \quad \frac{12x}{x-2} > 16; \quad \frac{12x-16x+32}{x-2} > 0, \quad \frac{4(8-x)}{x-2} > 0.$$

Графическое решение: 

Ответ: $(2; 8)$.

$$9. \sqrt{x+2(1-\sqrt{1+x})} < \frac{2x+3}{4\sqrt{1+x-5}}.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2(1-\sqrt{1+x})} &= \sqrt{x+2-2\sqrt{1+x}} = \\ &= \sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}. \end{aligned}$$

Исходное неравенство примет вид

$$\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} < \frac{2x+3}{4\sqrt{1+x-5}}; \quad |\sqrt{x+1}-1| < \frac{2x+3}{4\sqrt{1+x-5}}.$$

Отметим, что тогда

$$\frac{2x+3}{4\sqrt{1+x-5}} > 0. \quad (1)$$

1) Если $\sqrt{x+1}-1 \geq 0$, то $\sqrt{x+1} \geq 1$; $x \geq 0$.

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x+1}-1 < \frac{2x+3}{4\sqrt{1+x-5}} \end{cases}.$$

Выполним подстановку $\sqrt{1+x} = t \geq 0$.

Тогда $x+1 = t^2$; $2x = 2(t^2-1)$; $2x+3 = 2t^2+1 > 0$.

Получаем: $t-1 < \frac{2t^2+1}{4t-5}$.

Перенесем $\frac{2t^2+1}{4t-5}$ в левую часть неравенства и приведем к общему знаменателю, получаем $\frac{2t^2-9t+4}{4t-5} < 0$.

Убеждаемся, что числа 4 и $\frac{1}{2}$ — решения уравнения $2t^2-9t+4=0$. Получаем неравенство $\frac{2(t-4)(t-\frac{1}{2})}{4(t-\frac{5}{4})} < 0$.



Так как $\sqrt{x+1} \geq 1$, то $t \geq 1$, следовательно

$$1\frac{1}{4} < t < 4.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} < 4 \\ \sqrt{x+1} > 1\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 15 \\ x > \frac{9}{16} \end{cases}.$$

2) Если $\sqrt{x+1} - 1 < 0$, то $\sqrt{x+1} < 1$, $-1 \leq x < 0$.

Но $\frac{2x+3}{4\sqrt{1+x}-5} > 0$ (см. (1)),

следовательно $4\sqrt{1+x} - 5 > 0$

(так как на интервале $[-1; 0)$ $2x+3 > 0$).

Получаем: $\begin{cases} \sqrt{x+1} < 1 \\ \sqrt{x+1} > 1\frac{1}{4} \end{cases}$. Эта система решений не имеет.

Ответ: $(\frac{9}{16}; 15)$.

10. $\frac{1}{\sqrt{\frac{2-x}{x}} - \frac{x+1}{2x}} \geq 0$.

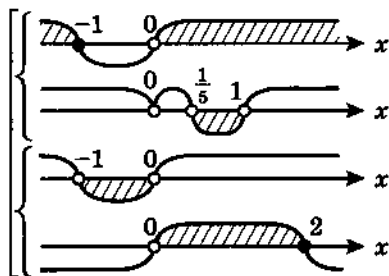
Данное неравенство равносильно неравенству

$\sqrt{\frac{2-x}{x}} > \frac{x+1}{2x}$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2x} \geq 0 \\ \sqrt{\frac{2-x}{x}} > \left(\frac{x+1}{2x}\right)^2 \\ \frac{x+1}{2x} < 0 \\ \sqrt{\frac{2-x}{x}} \geq 0 \end{cases}.$$

Неравенство во второй строчке системы приведем к виду

$$\frac{5x^2-6x+1}{4x^2} < 0.$$



Ответ: $(\frac{1}{5}; 1)$.

11. $\sqrt{x+14} - 6\sqrt{x+5} + \sqrt{x+30} - 10\sqrt{x+5} \leq 4$.

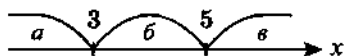
$$\sqrt{x+14} - 6\sqrt{x+5} + \sqrt{x+30} - 10\sqrt{x+5} \leq 4;$$

$$x+14 - 6\sqrt{x+5} = x+5 - 2 \cdot 3\sqrt{x+5} + 9 = (\sqrt{x+5} - 3)^2;$$

$$x+30 - 10\sqrt{x+5} = x+5 - 2 \cdot 5\sqrt{x+5} + 25 = (\sqrt{x+5} - 5)^2;$$

Тогда $\sqrt{(\sqrt{x+5} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+5} - 5)^2} \leq 4$,

т.е. $|\sqrt{x+5} - 3| + |\sqrt{x+5} - 5| \leq 4$.



а) $\sqrt{x+5} - 3 < 0$, тогда $\begin{cases} |\sqrt{x+5} - 3| = 3 - \sqrt{x+5} \\ |\sqrt{x+5} - 5| = 5 - \sqrt{x+5} \end{cases}$,

т.е. $\begin{cases} \sqrt{x+5} < 3 \\ 3 - \sqrt{x+5} + 5 - \sqrt{x+5} \leq 4 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{x+5} < 3 \\ \sqrt{x+5} \geq 2 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x+5 < 9 \\ x+5 \geq 4 \end{cases}; \begin{cases} x < 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad [-1; 4).$$

б) $\begin{cases} \sqrt{x+5} \geq 3 \\ \sqrt{x+5} < 5 \end{cases}$,

тогда $\begin{cases} |\sqrt{x+5} - 3| = \sqrt{x+5} - 3 \\ |\sqrt{x+5} - 5| = 5 - \sqrt{x+5} \end{cases}$,

$$\text{т.е. } \begin{cases} \sqrt{x+5} \geq 3 \\ \sqrt{x+5} < 5 \\ \sqrt{x+5} - 3 + 5 - \sqrt{x+5} \leq 4 \end{cases}; \begin{cases} x+5 \geq 9 \\ x+5 < 25 \\ 2 \leq 4 \end{cases} \quad [4; 20).$$

$$\text{в) } \sqrt{x+5} \geq 5, \text{ тогда } \begin{cases} |\sqrt{x+5} - 3| = \sqrt{x+5} - 3 \\ |\sqrt{x+5} - 5| = \sqrt{x+5} - 5 \end{cases},$$

$$\text{т.е. } \begin{cases} \sqrt{x+5} \geq 5 \\ \sqrt{x+5} - 3 + \sqrt{x+5} - 5 \leq 4 \end{cases};$$

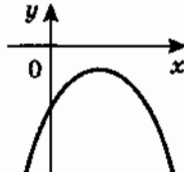
$$\begin{cases} x+5 \geq 25 \\ \sqrt{x+5} \leq 6 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 20 \\ x \leq 31 \end{cases} \quad [20; 31].$$

Ответ: $[-1; 31]$.

$$12. \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{-x^2 + 2x + 3} > -x^2 + 3x - 6.$$

Выглядит это неравенство технически очень громоздко. Для упрощения проанализируем его правую часть.

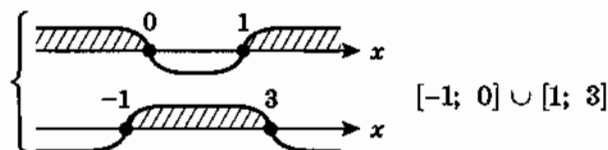
$$\text{Пусть } y = -x^2 + 3x - 6.$$

$$\text{Так как } \begin{cases} a = -1 < 0 \\ D = -15 < 0 \end{cases}, \text{ то}$$


$$\text{Значит } \forall x \quad -x^2 + 3x - 6 < 0.$$

Итак, левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, значит неравенство верно для любых x из области определения.

$$\text{Тогда } \begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ -(x-3)(x+1) \geq 0 \end{cases}.$$



$$[-1; 0] \cup [1; 3]$$

Ответ: $[-1; 0] \cup [1; 3]$.

Тренировочная работа 5

Решите неравенства 1–20.

1. $\sqrt{9-3x} + \sqrt{4-x} > \sqrt{2x+25}.$

2. $\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3} \geq \frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3}.$

3. $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + 1 > \sqrt{2x-1}.$

4. $\sqrt{x^3+2x-32} > x-2.$

5. $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-8x+7} \geq \sqrt{x^2-24x+23}.$

6. $\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x^2-4x}} \leq \frac{x+1}{2\sqrt{3}}.$

7. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} < 2 - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}.$

8. $\sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} \leq 1.$

9. $\sqrt{4+x} + \sqrt[4]{16-x} > 2.$

10. $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$

11. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} > \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}.$

12. $2\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} \leq \sqrt{2-x + \sqrt{(x+2) \cdot x}}.$

13. $\sqrt{49-4x\sqrt{x^2-7}} \leq 2x-7.$

14. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} \geq \frac{5}{\sqrt{x-3}}.$

15. $\sqrt{10-3x} - 2\sqrt{3+x} \leq \sqrt{2-x}.$

16. $(x-18) \cdot \sqrt{x^2+144} \leq x^2-9 \cdot 36.$

17. $2x+5 > 2\sqrt{x^2+5x} + \sqrt{x} - \sqrt{x+5}.$

18. $x^2 + 4x \cdot \sqrt{x-1} \leq 12(x-1).$

19. $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2} \leq 1.$

20. $\sqrt{x^2-2x-\sqrt{x^2-3x-4}} > x + \frac{1}{2}.$

Решение тренировочной работы 5

$$1. \sqrt{9-3x} + \sqrt{4-x} > \sqrt{2x+25}.$$

Данное неравенство равносильно системе

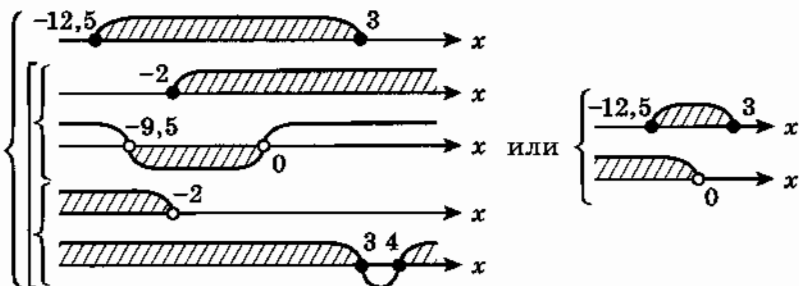
$$\begin{cases} 9-3x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 2x+25 \geq 0 \\ 9-3x+2\sqrt{(9-3x)(4-x)}+4-x > 2x+25 \end{cases}$$

Преобразуя последнее неравенство, получаем

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq 4 \\ x \geq -12,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3(x^2-7x+12)} > 3(x+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -12,5 \\ \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3(x^2-7x+12) > 9(x+2)^2 \\ x+2 < 0 \\ (x-3)(x-4) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Приведем неравенство $3(x^2-7x+12) > 9(x+2)^2$ к виду $2x^2+19x < 0$.



Ответ: $[-12,5; 0)$.

$$2. \frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3} \geq \frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3}.$$

Запишем неравенство в виде

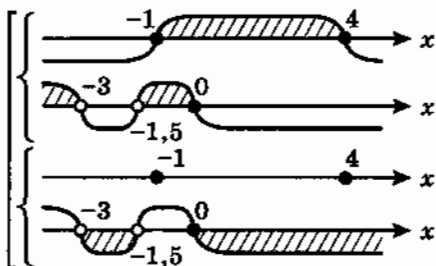
$$\sqrt{4+3x-x^2} \left(\frac{1}{2x+3} - \frac{1}{x+3} \right) \geq 0$$

и приведем выражения в скобках к общему знаменателю:

$$\sqrt{4+3x-x^2} \cdot \frac{-x}{(x+3)(2x+3)} \geq 0,$$

что равносильно совокупности систем

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{4+3x-x^2} \geq 0 \\ -\frac{x}{(x+3)(2x+3)} \geq 0 \\ \sqrt{4+3x-x^2} \leq 0 \\ -\frac{x}{(x+3)(2x+3)} \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2+3x+4 \geq 0 \\ -\frac{x}{(x+3)(2x+3)} \geq 0 \\ x=4 \\ x=-1 \\ -\frac{x}{(x+3)(2x+3)} \leq 0 \end{array} \right.$$



$$\text{Вспомним, что } b\sqrt{a} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ba^2 \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}.$$

Тогда можно получить более простое решение, если под-

$$\text{ставить } a = 4 + 3x - x^2 \text{ и } b = \frac{-x}{(x+3)(2x+3)}.$$

Ответ: $[-1; 0] \cup \{4\}$.

$$3. \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) + 1 > \sqrt{2x-1}.$$

Исходное неравенство можно записать так:

$$\frac{x^2-1}{2x} + 1 > \sqrt{2x-1}.$$

$$D(H): 2x-1 \geq 0;$$

$$D(H) = \left[\frac{1}{2}; \infty \right).$$

Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + 2x - 1 > 2x\sqrt{2x-1} \end{cases} \quad (\text{на } [\frac{1}{2}; \infty) \quad x^2 + 2x - 1 > 0).$$

Возведем в квадрат левую и правую части последнего неравенства, перенесем правую часть в левую и поделим почленно на x^2 :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 - 4x + 6 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + \frac{1}{x^2} - 4(x + \frac{1}{x}) + 6 > 0 \end{cases}$$

Выполним подстановку: $x + \frac{1}{x} = t$.

Тогда $x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Получаем: $t^2 - 2 - 4t + 6 > 0$; $(t-2)^2 > 0$ — верно для любого $t \neq 2$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{x} \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Ответ: $[\frac{1}{2}; 1) \cup (1; \infty)$.

4. $\sqrt{x^3 + 2x - 32} > x - 2$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

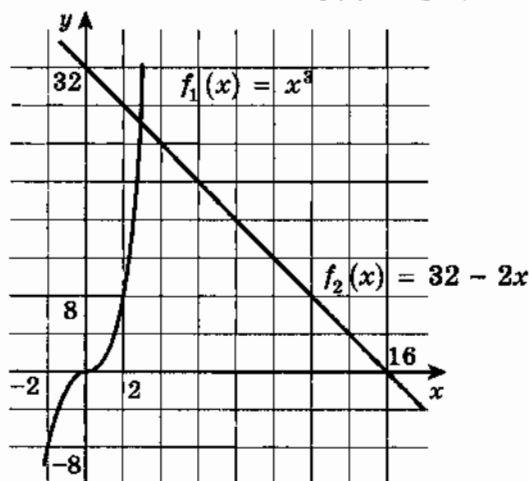
$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^3 + 2x - 32 > (x-2)^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x^3 + 2x - 32 \geq 0 \end{cases}$$

Заметим, что система $\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x^3 + 2x - 32 \geq 0 \end{cases}$ не имеет решений.

Выясним почему?

Пусть $f(x) = x^3 + 2x - 32$. Найдём графическое решение для неравенства $f(x) > 0$.

Введём обозначения: $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 32 - 2x$. Необходимо выяснить, когда $f_1(x) > f_2(x)$ на промежутке $(-\infty; 2)$.



(оси разномасштабны)

Очевидно, что на промежутке $(-\infty; 2)$ справедливо неравенство $x^3 < 32 - 2x$.

Возвратимся к системе
$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^3 + 2x - 32 > (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3 - x^2 + 6x - 36 > 0 \end{cases}$$

Пусть $\varphi(x) = x^3 - x^2 + 6x - 36$.

$\varphi(3) = 0$, т.е. система принимает вид

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ (x - 3)(x^2 + 2x + 12) > 0 \end{cases}$$

$x^2 + 2x + 12 = (x + 1)^2 + 11 > 0$ при любом x .

Получаем $\begin{cases} x \geq 2 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$ или $x > 3$.

Ответ: $(3; \infty)$.

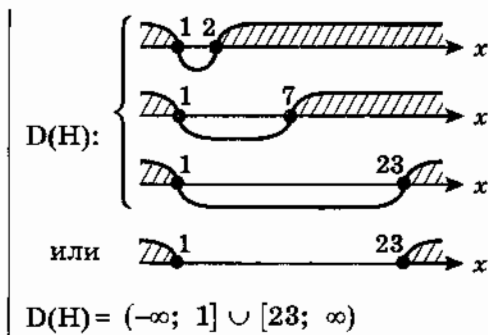
$$5. \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 8x + 7} \geq \sqrt{x^2 - 24x + 23}.$$

Представим подкоренные выражения в виде произведений:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-7)} \geq \sqrt{(x-1)(x-23)}.$$

Перенесем $\sqrt{(x-1)(x-23)}$ в левую часть. Получим:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-7)} - \sqrt{(x-1)(x-23)} \geq 0. \quad (1)$$



Напомним, что $\sqrt{a \cdot b} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; & a \geq 0, b \geq 0 \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}; & a \leq 0, b \leq 0 \end{cases}.$

1) Найдем решение при $x \leq 1$. Неравенство (1) приобретает вид $\sqrt{1-x}(\sqrt{2-x} + \sqrt{7-x} - \sqrt{23-x}) \geq 0$, которое равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{7-x} \geq \sqrt{23-x} \\ x \leq 1 \\ \sqrt{1-x} \leq 0 \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{7-x} \leq \sqrt{23-x} \end{cases}.$$

Возведем в квадрат последнее неравенство. Получим:

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 2-x + 2\sqrt{(2-x)(7-x)} + 7-x \geq 23-x \\ x \leq 1 \\ x = 1 \\ 1 + \sqrt{6} \leq \sqrt{22} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 - 9x + 14} \geq 14 + x \\ x = 1 \end{cases}$$

Напомним, что $\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a \geq b^2 \\ b < 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$.

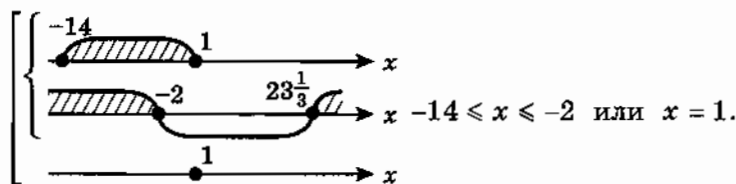
Получаем

$$\text{а) } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -14 \\ 4(x^2 - 9x + 14) \geq x^2 + 28x + 196 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -14 \\ 3x^2 - 64x - 140 \geq 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Убеждаемся, что числа $23\frac{1}{3}$ и -2 — решения уравнения $3x^2 - 64x - 140 = 0$. Получаем:

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -14 \\ 3(x+2)(x-23\frac{1}{3}) \geq 0 \\ x = 1 \end{cases}$$



$$\text{б) } \begin{cases} x \leq 1 \\ x < -14 \\ x^2 - 9x + 14 \geq 0 \end{cases} \quad \text{имеет решение } x < -14.$$

Объединяем решения:
$$\begin{cases} -14 \leq x \leq -2 \\ x < -14 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

2) Найдем решение при $x \geq 23$.

Неравенство (1) приобретает вид

$$\sqrt{x-1}(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} - \sqrt{x-23}) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 23 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} \geq \sqrt{x-23} \end{cases}.$$

Возведем в квадрат последнее неравенство:

$$\begin{cases} x \geq 23 \\ x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(x-7)} + x - 7 \geq x - 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 23 \\ 2\sqrt{x^2 - 9x + 14} \geq -x - 14 \end{cases}.$$

Отметим, что $-x - 14 < 0$ при $x \geq 23$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [23; \infty) \cup \{1\}$.

6.
$$\frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x^2 - 4x}} \leq \frac{x+1}{2\sqrt{3}}.$$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ 2\sqrt{3}(x^2 - 4x - 5) \leq (x+1)\sqrt{x^2 - 4x} \end{cases}.$$

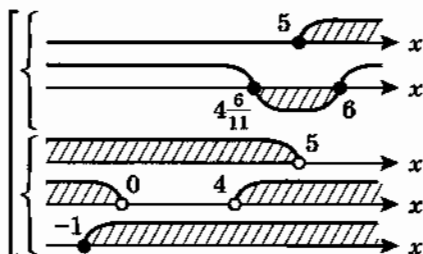
Разложим выражение $(x^2 - 4x - 5)$ на множители $(x - 5)$ и $(x + 1)$ и перенесем $(x + 1)\sqrt{x^2 - 4x}$ в левую часть:

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ ((x+1)(2\sqrt{3}(x-5) - \sqrt{x^2 - 4x})) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2\sqrt{3}(x - 5) \leq \sqrt{x^2 - 4x} \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ 2\sqrt{3}(x - 5) \geq \sqrt{x^2 - 4x} \end{cases} \end{cases}.$$

Последняя система решений не имеет, так как при $x \leq -1$ получается, что $\sqrt{x^2 - 4x} < 0$ ($x^2 - 4x > 0$), а такого не может быть.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4x} \geq 2\sqrt{3}(x - 5) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ x \geq -1 \\ \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2 - 4x \geq 12(x - 5)^2 \\ x < 5 \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 11x^2 - 116x + 300 \leq 0 \\ x < 5 \\ x^2 - 4x > 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $[-1; 0) \cup (4; 6]$.

7. $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} < 2 - \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$.

Возведем обе части неравенства в третью степень:

$$1 + \sqrt{x} < 8 - 3 \cdot 4\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} + 3 \cdot 2\sqrt[3]{(1 - \sqrt{x})^2} - 1 + \sqrt{x}.$$

Перенесем $1 + \sqrt{x}$ в правую часть и поделим выражение почленно на 6:

$$\begin{aligned} 0 &< 1 - 2\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - \sqrt{x})^2} \\ &\Leftrightarrow (1 - \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}})^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x} \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(0; \infty)$.

$$8. \sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} \leq 1.$$

Введем подстановку: $\sqrt{x+1} = t \geq 0$.

Тогда $x+1 = t^2$; $x+2 = t^2+1$; $x+5 = t^2+4$.

Исходное неравенство примет вид

$$\sqrt{t^2+4} - 4t + \sqrt{t^2+1} - 2t \leq 1.$$

Выделим полный квадрат:

$$\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow |t-2| + |t-1| \leq 1.$$

Найдем решение:

$$1) \text{ если } \begin{cases} t \leq 1 \\ 2-t+1-t \leq 1 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 1 \end{cases} \text{ или } t = 1;$$

$$2) \text{ если } \begin{cases} 1 < t \leq 2 \\ 2-t+t-1 \leq 1 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} 1 < t \leq 2 \\ 1 = 1 \end{cases} \text{ или } 1 < t \leq 2;$$

$$3) \text{ если } \begin{cases} t > 2 \\ t-2+t-1 \leq 1 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} t > 2 \\ t \leq 2 \end{cases}, \text{ и решений нет.}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем:

$$1) \text{ если } \sqrt{x+1} = 1, \text{ то } x = 0;$$

$$2) \text{ если } 1 < \sqrt{x+1} \leq 2, \text{ то } 0 < x \leq 3.$$

Ответ: $[0; 3]$.

$$9. \sqrt{4+x} + \sqrt[4]{16-x} > 2.$$

Введем подстановку: $\sqrt[4]{16-x} = t \geq 0$.

Тогда $\sqrt{16-x} = t^2$; $16-x = t^4$; $x = 16-t^4$;

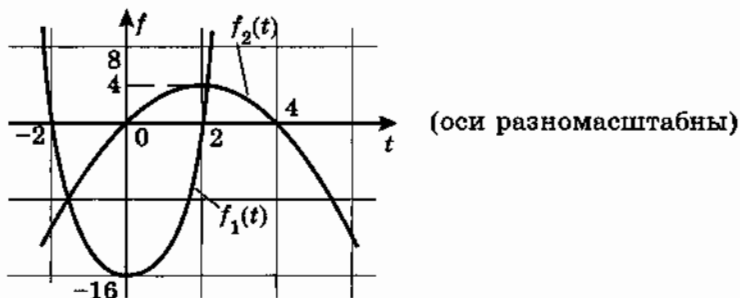
$$x+4 = 20-t^4.$$

Исходное неравенство примет вид $\sqrt{20-t^4} > 2-t$ ($t \geq 0$), что равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{cases} 2-t \geq 0 \\ 20-t^4 > 4-4t+t^2 \\ t \geq 0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 \leq t \leq 2 \\ t^4+t^2-4t-16 < 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} 2-t < 0 \\ 20-t^4 \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} t > 2 \\ t^4 \leq 20 \end{cases} \right.]$$

Уравнение $t^4 + t^2 - 4t - 16 = 0$ целых и рациональных корней не имеет. Обозначим $f(t) = t^4 + t^2 - 4t - 16$ и определим графически, когда $f(t) < 0$?

Построим графики функций $f_1(t) = t^4 - 16$ и $f_2(t) = 4t - t^2$.



Очевидно, что на промежутке $[0; 2]$: $f_1(t) < f_2(t)$.

Тогда $\begin{cases} 0 \leq t \leq 2 \\ 2 < t \leq \sqrt[4]{20} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \sqrt[4]{20}$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$0 \leq \sqrt[4]{16 - x} \leq \sqrt[4]{20}$$

или, возводя части неравенства в четвертую степень:

$$0 \leq 16 - x \leq 20 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 16 \end{cases}$$

Ответ: $[-4; 16]$.

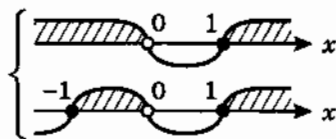
10. $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$.

Отметим, что:

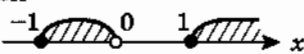
$x\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{x^2 - x}$ на промежутке $[1; \infty)$,

$x\sqrt{\frac{x-1}{x}} = -\sqrt{x^2 - x}$ на промежутке $[-1; 0)$.

$$D(H): \begin{cases} \frac{x-1}{x} \geq 0 \\ x - \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases}$$



или



Возвращаемся к исходному неравенству:

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \geq 0.$$

Так как $\sqrt{\frac{x-1}{x}} \geq 0$, то $\frac{x-1}{x} \geq 0$.

Возведем в квадрат обе части неравенства:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{1}{x} > \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{2(x-1)}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{x-1}{x} \\ \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 > \frac{(x-1)^2}{x^2} + \frac{2(x-1)}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ \frac{(x+1)(x-1)}{x} \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть первого неравенства всегда положительна, тогда вынесем за скобку $(x-1)$ и получим

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (x-1) \left(1 - \frac{x-1}{x^2} - \frac{2}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x}}\right) > 0; \\ x \geq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{x-1}{x^2} > \frac{2}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x}}; \\ x > 1 \end{array} \right. &\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2-x+1}{x^2} > \frac{2}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ x > 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Умножим обе части первого неравенства системы на x^2 :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x + 1 > 2\sqrt{x^2 - x}; \\ x > 1 \end{array} \right. &\quad \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{x^2 - x} - 1)^2 > 0; \\ x > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 - x} \neq 1; \\ x > 1 \end{array} \right. &\quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x \neq 1; \\ x > 1 \end{array} \right. &\quad \left\{ \begin{array}{l} x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x > 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Окончательное решение — $\left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$.

Ответ: $\left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$.

$$11. \sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} > \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}.$$

$$D(H): \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \\ 5x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{5}.$$

Представим неравенство в виде:

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{5x-4} > \sqrt{4x-3} - \sqrt{3x-2} \quad (1)$$

Найдем решение, проанализировав знаки правой и левой частей этого неравенства.

$$a) \begin{cases} \sqrt{2x-1} > \sqrt{5x-4} \\ \sqrt{4x-3} > \sqrt{3x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 5x-4 \\ 4x-3 > 3x-2 \\ 5x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 1 \\ x \geq 0,8 \end{cases}.$$

$x \in \emptyset$, т. е. такого варианта нет.

$$б) \begin{cases} \sqrt{2x-1} > \sqrt{5x-4} \\ \sqrt{4x-3} < \sqrt{3x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 5x-4 \\ 4x-3 < 3x-2 \\ 5x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < 1 \\ x \geq 0,8 \end{cases}.$$

Система имеет решение при любом $x \in [0,8; 1)$.

Так как левая часть (1) положительна, а правая отрицательна, то данное неравенство верно всегда на $[0,8; 1)$.

$$в) \begin{cases} \sqrt{2x-1} < \sqrt{5x-4} \\ \sqrt{4x-3} > \sqrt{3x-2} \end{cases} \quad x > 1.$$

Когда левая часть неравенства меньше нуля, а правая часть больше нуля, это противоречит условию (1). Тогда на $(1; \infty)$ решения нет.

г) При $x = 1$, $0 > 0$ — решения нет.

Нет смысла рассматривать другие случаи, так как на промежутке $(-\infty; 0,8)$ неравенство не определено.

Ответ: $[0,8; 1)$.

$$12. 2\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} \leq \sqrt{2-x} + \sqrt{(x+2) \cdot x}.$$

Возведем в квадрат обе части заданного неравенства и вынесем за скобку $\sqrt{x+2}$:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} [4(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}) - \sqrt{x}] \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

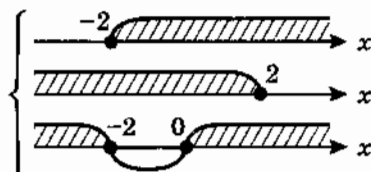
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 4(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}) \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

или после возведения в квадрат последнего неравенства

$$\begin{cases} x = -2 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 16(2\sqrt{4-x^2} + 4) \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{4-x^2} \leq \frac{x}{16} - 4 \end{cases}.$$

Используя свойство $\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a \geq 0 \\ a \leq b^2 \end{cases}$, получаем:

$$D(H): \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ (x+2)x \geq 0 \end{cases}.$$



$$D(H) = [0; 2] \cup \{-2\}.$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{16} - 4 \geq 0 \\ 4(4 - x^2) \leq \left(\frac{x-64}{16}\right)^2 \end{cases} \quad \emptyset.$$

Убеждаемся, что только $x = -2$ является решением исходного неравенства.

Ответ: $\{-2\}$.

$$13. \sqrt{49 - 4x\sqrt{x^2 - 7}} \leq 2x - 7.$$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ 49 - 4x\sqrt{x^2 - 7} \geq 0 \\ 49 - 4x\sqrt{x^2 - 7} \leq (2x - 7)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3,5 \\ 4x\sqrt{x^2 - 7} \leq 49 \\ (7 - 2x + 7)(7 + 2x - 7) \leq 4x\sqrt{x^2 - 7} \end{cases}$$

или после возведения в квадрат второго неравенства и приведения подобных членов в последнем

$$\begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ 16x^4 - 112x^2 - 49^2 \leq 0 \\ \sqrt{x^2 - 7} \geq 7 - x \end{cases}$$

Числа $\frac{14-7\sqrt{53}}{4}$ и $\frac{14+7\sqrt{53}}{4}$ — корни уравнения

$$16x^4 - 112x^2 - 49^2 = 0 \text{ относительно } x^2.$$

Тогда $\frac{14-7\sqrt{53}}{4} \leq 0 \leq x^2 \leq \frac{14+7\sqrt{53}}{4}$ или

$$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2}.$$

Последнее неравенство системы равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ x^2 - 7 \geq 49 - 14x + x^2 \\ 7 - x < 0 \\ x^2 - 7 \geq 0 \end{cases}.$$

Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} 3,5 \leq x \leq \frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2} \\ \begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq 4 \\ x > 7 \\ x^2 \geq 7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3,5 \leq x \leq \frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2} \\ x \geq 4 \end{cases}.$$

Можно доказать, что $\frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2} > 4$.

Ответ: $\left[4; \frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2}\right]$.

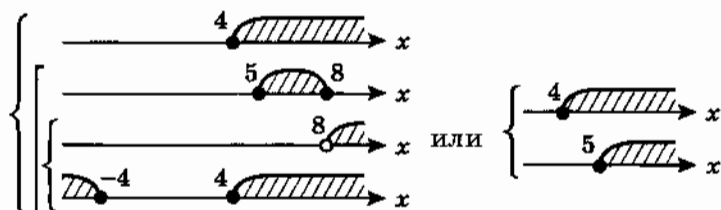
$$14. \frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} \geq \frac{5}{\sqrt{x-3}}.$$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \\ \sqrt{x^2 - 16} + x - 3 \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \sqrt{x^2 - 16} \geq 8 - x \end{cases}$$

или, используя второе свойство иррациональных неравенств, получаем

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ x^2 - 16 \geq 64 - 16x + x^2 \\ 8 - x < 0 \\ x^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 5 \\ x > 8 \\ (x-4)(x+4) \geq 0 \end{cases} \end{cases}.$$



Ответ: $[5; \infty)$.

$$15. \sqrt{10-3x} - 2\sqrt{3+x} \leq \sqrt{2-x}.$$

Перенесем $2\sqrt{3+x}$ в правую часть неравенства:

$$\sqrt{10-3x} \leq \sqrt{2-x} + 2\sqrt{3+x} \Leftrightarrow$$

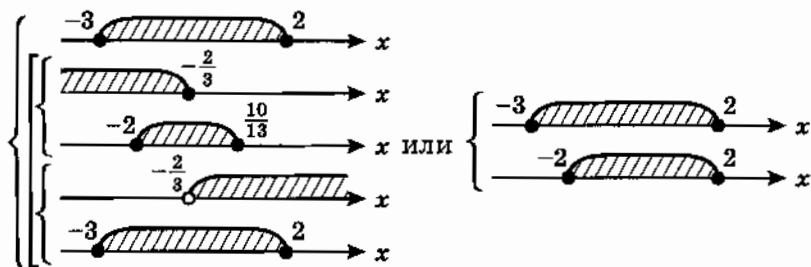
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-3x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 10-3x \leq 2-x+4\sqrt{(2-x)(3+x)}+4(3+x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{(2-x)(3+x)} \geq -3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} -3x-2 \geq 0 \\ 4(-x^2-x+6) \geq 9x^2+12x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} -3x-2 < 0 \\ (2-x)(x+3) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Приводим неравенство $4(-x^2-x+6) \geq 9x^2+12x+4$ к виду $13x^2+16x-20 \leq 0$. Числа $\frac{10}{13}$ и -2 являются решениями уравнения $13x^2+16x-20=0$.

$$\text{Получаем } \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ -2 \leq x \leq \frac{10}{13} \\ x > -\frac{2}{3} \\ (2-x)(x+3) \geq 0 \end{cases} \end{cases}.$$



Ответ: $[-2; 2]$.

16. $(x - 18)\sqrt{x^2 + 144} \leq x^2 - 9 \cdot 36$.

Перенесем $x^2 - 9 \cdot 36$ в левую часть неравенства:

$$(x - 18)[\sqrt{x^2 + 144} - (x + 18)] \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 18 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 144} \leq x + 18 \\ x - 18 \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + 144} \geq x + 18 \end{cases}$$

или, воспользовавшись свойствами неравенств, получаем:

$$\begin{cases} x \geq 18 \\ x^2 + 144 \leq x^2 + 36x + 324 \\ x \leq 18 \\ \begin{cases} x + 18 \geq 0 \\ x^2 + 144 \geq x^2 + 36x + 324 \\ x + 18 < 0 \\ x^2 + 144 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 18 \\ x \geq -5 \\ x \leq 18 \\ \begin{cases} x \geq -18 \\ x \leq -5 \\ x < -18 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq 18 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [18; \infty)$.

17. $2x + 5 > 2\sqrt{x^2 + 5x} + \sqrt{x} - \sqrt{x + 5}$.

Выполним подстановки

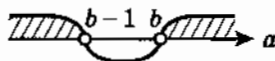
$$\sqrt{x + 5} = a \text{ и } \sqrt{x} = b.$$

$$\begin{cases} x^2 + 5x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Тогда $x + 5 = a^2$; $x = b^2$; $2x + 5 = a^2 + b^2$.

Исходное неравенство примет вид

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 > 2a \cdot b + b - a &\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - b) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a - b)(a - b + 1) > 0. \end{aligned}$$



Возвращаясь к переменной x , получим

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x+5} > \sqrt{x} \\ \sqrt{x+5} < \sqrt{x} - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+5 > x \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+5 < x-2\sqrt{x}+1 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 1 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x} < -2 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \quad \varnothing \quad \Leftrightarrow x \geq 0. \end{aligned}$$

Ответ: $[0; \infty)$.

18. $x^2 + 4x\sqrt{x-1} \leq 12(x-1)$.

Добавим к обеим частям неравенства $4(\sqrt{x-1})^2$ для того, чтобы в левой части выделить полный квадрат, тогда

$$\begin{aligned} x^2 + 2x \cdot 2\sqrt{x-1} + 4(\sqrt{x-1})^2 &\leq 12(x-1) + 4(\sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x + 2\sqrt{x-1})^2 \leq 16(x-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x + 2\sqrt{x-1})^2 - (4\sqrt{x-1})^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Разложив по формуле $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, получим

$$\begin{aligned} (x + 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1})(x + 2\sqrt{x-1} - 4\sqrt{x-1}) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x + 6\sqrt{x-1})(x - 2\sqrt{x-1}) \leq 0. \end{aligned}$$

Так как согласно D(H) $x \geq 1$, то $x + 6\sqrt{x-1} > 0$.

Тогда

$$x \leq 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2 \leq 4(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{2\}$.

19. $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2} \leq 1.$

Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ \sqrt{13-7x-6x^2} \leq x-2 \\ x < 2 \\ \sqrt{13-7x-6x^2} \geq x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 13-7x-6x^2 \geq 0 \\ 13-7x-6x^2 \leq x^2-4x+4 \\ x < 2 \\ 13-7x-6x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -6x^2-7x+13 \geq 0 \\ 7x^2+3x-9 \geq 0 \\ x < 2 \\ 13-7x-6x^2 \geq 0 \end{cases}.$$

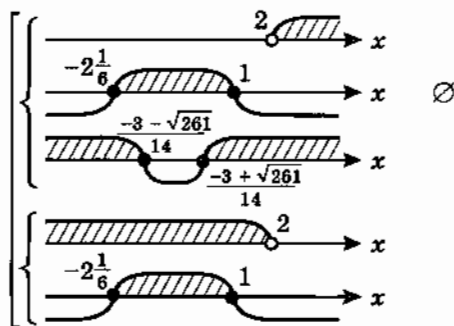
Числа 1 и $-\frac{13}{6}$ — корни уравнения $-6x^2-7x+13=0$,

числа $\frac{-3+\sqrt{261}}{14}$ и $\frac{-3-\sqrt{261}}{14}$ —

корни уравнения $7x^2+3x-9=0$.

Тогда

$$\begin{cases} x > 2 \\ -6(x-1)\left(x+\frac{13}{6}\right) \geq 0 \\ 7\left(x-\left(\frac{-3+\sqrt{261}}{14}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-3-\sqrt{261}}{14}\right)\right) \geq 0 \\ x < 2 \\ -6(x-1)\left(x+\frac{13}{6}\right) \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $\left[-2\frac{1}{6}; 1\right]$.

20. $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - 3x - 4} > x + \frac{1}{2}$.

a) $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 - 2x - \sqrt{x^2 - 3x - 4} > x^2 + x + \frac{1}{4} \end{cases};$

$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \sqrt{x^2 - 3x - 4} < -3x - \frac{1}{4} \end{cases};$

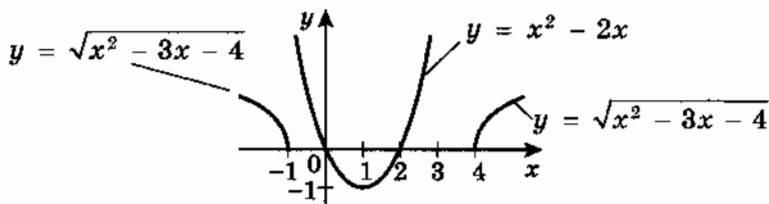
$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ -3x - \frac{1}{4} \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{16} \end{cases};$

$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{12} \\ 8x^2 + 4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{16} > 0 \\ (x-4)(x+1) \geq 0 \end{cases};$

$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{12} \\ 128x^2 + 72x + 65 > 0 \quad \forall x \\ (x-4)(x+1) \geq 0 \end{cases} \quad \emptyset.$

$$6) \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x^2 - 2x \geq \sqrt{x^2 - 3x - 4} \end{cases}.$$

Решим неравенство $x^2 - 2x \geq \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ графически.



Видно, что $x^2 - 2x \geq \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ при $\forall x \in D(H)$.

$$D(H): x^2 - 3x - 4 \geq 0.$$

$$D(H) = (-\infty; -1] \cup [4; \infty).$$

Но $x < -\frac{1}{2}$.

Ответ: $(-\infty; -1]$.

Самостоятельная работа 4**Вариант 1**

1. $-x - 3 < \sqrt{9 - x}$.
2. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 3} < 3$.
3. $\sqrt{2x^2 - 2x + 5} - \sqrt{2x^2 - 2x} \geq 1$.
4. $\sqrt{x + 3} - 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 8} - 6\sqrt{x - 1} > 1$.
5. $|x + 2| - 3 \leq \sqrt{3x^2 - 3}$.
6. $\frac{3}{\sqrt{x+4}+2} > \frac{2}{\sqrt{x+9}+3}$.
7. $\frac{9}{\sqrt{x^2-6x+18}} + \frac{10}{\sqrt{x^2-6x+34}} \geq 5$.
8. $2x + 5 > 2\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x} + \sqrt{x + 5}$.
9. $\sqrt{1 - x} \leq \frac{5x^2 - 20x + 16}{x^2 - 12x + 16}$.
10. $\sqrt{x + 3} - \sqrt{3x + 6} > 2x + 3$.

Вариант 2

1. $x - 3 < \sqrt{9 + x}$.
2. $\sqrt{3 - x} + \sqrt{-1 - 2x} < 3$.
3. $\sqrt{2x^2 + 2x + 5} - 1 \geq \sqrt{2x^2 + 2x}$.
4. $\sqrt{5x + 3} - 4\sqrt{5x - 1} + \sqrt{5x + 8} - 6\sqrt{5x - 1} > 1$.
5. $|2 - x| - 3 \leq \sqrt{3x^2 - 3}$.
6. $\frac{3}{\sqrt{4-2x}+3} > \frac{2}{\sqrt{9-2x}+3}$.
7. $\frac{9}{\sqrt{x^2+6x+18}} + \frac{10}{\sqrt{x^2+6x+34}} \geq 5$.
8. $4x + 5 > 2\sqrt{4x^2 + 10x} - \sqrt{2x} + \sqrt{2x + 5}$.
9. $\sqrt{1 + x} \leq \frac{5x^2 + 20x + 16}{x^2 + 12x + 16}$.
10. $\sqrt{3 - x} + 2x - 3 > \sqrt{6 - 3x}$.

3

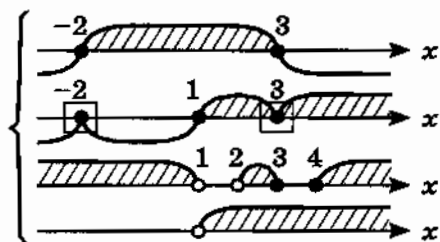
Системы иррациональных неравенств

Практикум 6

$$1. \begin{cases} (x-1)\sqrt{6+x-x^2} \geq 0 \\ \sqrt{1+\frac{2}{x-2}} \geq \sqrt{\frac{6}{x-1}} \end{cases}$$

Так как $a\sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a \cdot b^2 \geq 0 \end{cases}$,

$$\text{то } \begin{cases} 6+x-x^2 \geq 0 \\ (x-1)(6+x-x^2)^2 \geq 0 \\ 1+\frac{2}{x-2} \geq \frac{6}{x-1} \\ x-1 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -(x-3)(x+2) \geq 0 \\ (x-1)(x-3)^2(x+2)^2 \geq 0 \\ \frac{x^2-7x+12}{(x-2)(x-1)} \geq 0 \\ x > 1 \end{cases};$$



Ответ: $(2; 3]$.

$$2. \begin{cases} \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leq \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5} \\ \frac{\sqrt{5-x-3}}{\sqrt{5-x-2}} \leq 0 \end{cases} \quad \text{Пусть } \sqrt{5-x} = t$$


$$\begin{cases} \sqrt{12-x-x^2} \left(\frac{1}{2x-7} - \frac{1}{x-5} \right) \leq 0 \\ \sqrt{5-x} \leq 3 \\ \sqrt{5-x} > 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \sqrt{12-x-x^2} \frac{2-x}{(2x-7)(x-5)} \leq 0 \\ 5-x \leq 9 \\ 5-x > 4 \end{cases} ;$$

Так как $a\sqrt{b} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a \cdot b^2 \leq 0 \end{cases}$,

$$\begin{cases} 12-x-x^2 \geq 0 \\ \frac{(2-x)(12-x-x^2)^2}{(2x-7)(x-5)} \leq 0 \\ x \geq -4 \\ x < 1 \end{cases} ; \begin{cases} \text{Diagram 1: } x \in [-4, 3] \text{ shaded} \\ \text{Diagram 2: } x \in [-4, 2] \cup (3, 5] \text{ shaded} \\ \text{Diagram 3: } x \in [-4, 1) \text{ shaded} \end{cases}$$

Ответ: $x = -4$.

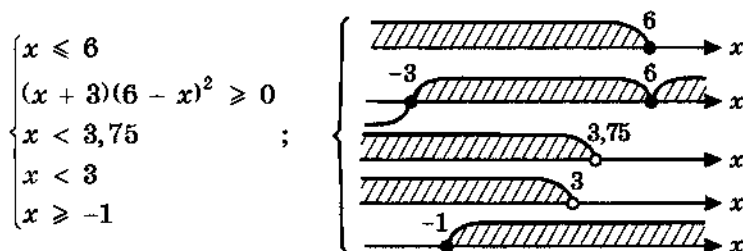
$$3. \begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{2}{2-x} < 0 \\ \sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} < 2 \end{cases} \quad \text{Так как } \sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a < b^2 \\ a \geq 0 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} \frac{4-x}{(x-1)(2-x)} < 0 \\ \frac{x+3}{2x-1} < 4 \\ \frac{x+3}{2x-1} \geq 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \frac{x-4}{(x-1)(x-2)} < 0 \\ \frac{7(x-1)}{2x-1} > 0 \\ \frac{x+3}{2x-1} \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} \text{Diagram 1: } x \in (1, 2) \cup (4, \infty) \text{ shaded} \\ \text{Diagram 2: } x \in (0.5, 1) \cup (2, \infty) \text{ shaded} \\ \text{Diagram 3: } x \in (-3, 0.5] \cup (1, \infty) \text{ shaded} \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup (2; 4)$.

$$4. \begin{cases} (x+3)\frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{15-4x}} \geq 0 \\ \frac{4-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1} > 0 \end{cases}; \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ (x+3)(6-x)^2 \geq 0; \\ 15-4x > 0 \\ \sqrt{x+1} < 2 \end{cases};$$

$$\sqrt{x+1}+1 > 0 \quad \forall x \in D(H)$$



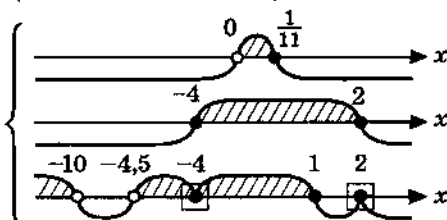
Ответ: $[-1; 3)$.

$$5. \begin{cases} 4\sqrt{\frac{2}{x}+3}+5 \leq \frac{3x+2}{x} \\ \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \geq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \end{cases}; \begin{cases} 4\sqrt{\frac{2}{x}+3}+5 \leq \frac{3x+2}{x} \\ \sqrt{8-2x-x^2} \left(\frac{1}{2x+9} - \frac{1}{x+10} \right) \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{\frac{2}{x}+3} = t \quad (t \geq 0)$; $4t+5 \leq t^2$; $t^2-4t-5 \geq 0$;

$$(t-5)(t+1) \geq 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{x}+3} \geq 5 \\ \sqrt{\frac{2}{x}+3} \leq -1 \quad \emptyset \\ \sqrt{8-2x-x^2} \frac{-x+1}{(2x+9)(x+10)} \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{2(1-11x)}{x} \geq 0 \\ -(x+4)(x-2) \geq 0 \\ \frac{(1-x)(x+4)^2(x-2)^2}{(2x+9)(x+10)} \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $\left(0; \frac{1}{11}\right]$.

$$6. \begin{cases} \sqrt{7-|3x-1|} < 2 \\ \frac{4x^2-8x-5}{\sqrt{3x^2-6x}} \leq \frac{2x+1}{3}; \end{cases} \begin{cases} 7-|3x-1| < 4 \\ 7-|3x-1| \geq 0 \\ 3x^2-6x > 0 \text{ при этом } (\sqrt{3x^2-6x} > 0); \\ 3(2x-5)(2x+1) - (2x+1)\sqrt{3x^2-6x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |3x-1| > 3 \\ |3x-1| \leq 7 \\ 3x(x-2) > 0 \\ (2x+1)(6x-15-\sqrt{3x^2-6x}) \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно решение системы модульных неравенств.

$$\begin{cases} |3x-1| > 3 \\ |3x-1| \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 > 3 \\ 3x-1 < -3 \\ 3x-1 \leq 7 \\ 3x-1 \geq -7 \end{cases}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{штриховка на } x \text{ от } -\frac{2}{3} \text{ до } 1\frac{1}{3} \\ \text{штриховка на } x \text{ от } -2 \text{ до } 2\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Рассмотрим систему неравенств на участках,

учтя при этом, что $a \cdot b \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

Получим:

$$a) \begin{cases} -2 \leq x < -\frac{2}{3} \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases} \\ (2x+1)(6x-15-\sqrt{3x^2-6x}) \leq 0 \end{cases}$$

Так как $x < -\frac{2}{3}$, то $2x+1 < 0$, значит $6x-15-\sqrt{3x^2-6x} \geq 0$

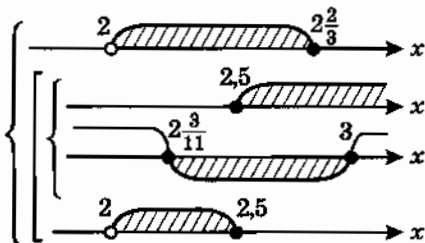
$$\text{тогда } \begin{cases} -2 \leq x < -\frac{2}{3} \\ \sqrt{3x^2-6x} \leq 3(2x-5) \quad \emptyset \quad (2x-5 < 0) \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 1\frac{1}{3} < x \leq 2\frac{2}{3} \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases} \\ (2x+1)(6x-15-\sqrt{3x^2-6x}) \leq 0 \end{cases}$$

Так как $x > 2$, то $2x + 1 > 0$, значит $6x - 15 - \sqrt{3x^2 - 6x} \leq 0$,

$$\text{тогда } \begin{cases} 2 < x \leq 2\frac{2}{3} \\ \sqrt{3x^2 - 6x} \geq 3(2x - 5) \end{cases}; \quad \begin{cases} 2\frac{2}{3} \geq x > 2 \\ \begin{cases} x \geq 2,5 \\ 3x(x - 2) \geq 9(2x - 5)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < x \leq 2,5 \\ 3x(x - 2) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

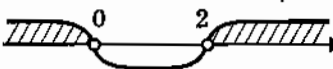
$$\begin{cases} 2\frac{2}{3} \geq x > 2 \\ \begin{cases} x \geq 2,5 \\ 11x^2 - 58x + 75 \leq 0 \\ 2 < x \leq 2,5 \end{cases} \end{cases} \quad \left(\begin{aligned} 11x^2 - 58x + 75 &= \\ &= 11(x - 3)\left(x - 2\frac{3}{11}\right) \end{aligned} \right).$$



Ответ: $(2; 2\frac{2}{3}]$.

Рассмотрим несколько иной способ решения системы.

Так как $D(H) \ 3x^2 - 6x > 0$ (для $\frac{1}{\sqrt{3x^2 - 6x}} \geq 0$)

$3x(x - 2) > 0$  x , то рассмотрим систему неравенств на каждом интервале отдельно.

а) $x > 2$ тогда $3x - 1 > 0$ значит $|3x - 1| = 3x - 1$

$$\begin{cases} x > 2 \\ \sqrt{7 - 3x + 1} < 2 \\ 3(4x^2 - 8x - 5) \leq (2x + 1)\sqrt{3x^2 - 6x} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ 8 - 3x < 4 \\ 8 - 3x \geq 0 \end{cases};$$

$$((2x + 1)(6x - 15 - \sqrt{3x^2 - 6x}) \leq 0$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{4}{3} \quad (2x + 1 > 0) \\ x \leq 2\frac{2}{3} \\ \sqrt{3x(x-2)} \geq 3(2x-5) \end{cases}; \quad \begin{cases} 2,5 \leq x \leq 2\frac{2}{3} \\ 3x(x-2) \geq 9(4x^2 - 20x + 25); \\ 2 < x \leq 2,5 \\ \sqrt{3x(x-2)} > 3(2x-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,5 \leq x \leq 2\frac{2}{3} \\ 11x^2 - 58x + 75 \leq 0 \\ 2 < x \leq 2,5 \end{cases} \quad \begin{cases} [2,5; 2\frac{2}{3}] \\ (2; 2,5] \end{cases}, \text{ т.е. } \left(2; 2\frac{2}{3}\right]$$

6) $x < 0$ тогда $3x - 1, |3x - 1| = 1 - 3x$

$$\begin{cases} \sqrt{7 + 3x - 1} < 2 \\ ((2x + 1)(6x - 15 - \sqrt{3x^2 - 6x}) \leq 0 \end{cases}$$

при $x < 0$ ($6x - 15 < 0$, тогда $6x - 15 - \sqrt{3x^2 - 6x} < 0$)

$$\begin{cases} x < 0 \\ 6 + 3x < 4 \\ 6 + 3x \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{2}{3} \\ x \geq -2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \emptyset.$$

Ответ: $\left(2; 2\frac{2}{3}\right]$.

$$7. \begin{cases} (x^2 - 7x + 10)(\sqrt{7 - 2x} - x - 4) > 0 \\ \frac{x^2 - 3x - 10}{\sqrt{x^2 - 4x}} \leq \frac{x + 2}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$D(C.H.): \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ 7 - 2x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{0} & 4 \\ \text{3,5} \end{cases}$$

($D(C.H.)$ — область определения системы неравенств.)

$$\begin{cases} (x - 2)(x - 5)(\sqrt{7 - 2x} - x - 4) > 0 \\ \frac{(x - 5)(x + 2)}{\sqrt{x^2 - 4x}} \leq \frac{x + 2}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

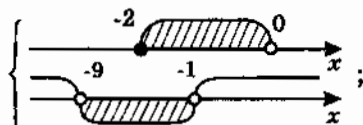
На $(-\infty; 0)$ $(x - 2)(x - 5) > 0$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{7-2x} - x - 4 > 0 \\ ((x+2)((x-5)2\sqrt{3} - \sqrt{x^2-4x}) \leq 0 \end{cases},$$

но $2\sqrt{3}(x-5) - \sqrt{x^2-4x} < 0$ при $x < 0$.

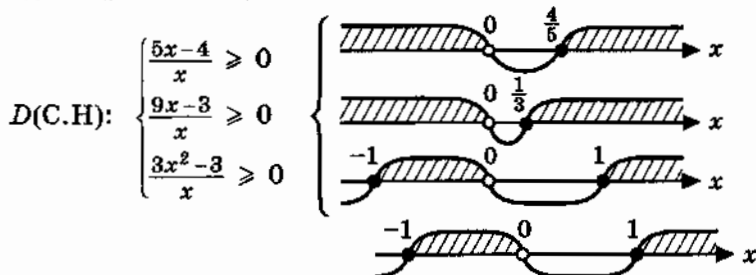
Значит $\begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{7-2x} > x+4; \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 7-2x > x^2+8x+16 \quad (x+4 > 0); \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ x^2+10x+9 < 0 \end{cases}.$$



Ответ: $[-2; -1)$.

8. $\begin{cases} x\sqrt{5-\frac{4}{x}} < -3 \\ \sqrt{9-\frac{3}{x}} \leq 3x - \sqrt{3x-\frac{3}{x}} \end{cases}$



а) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x\sqrt{5-\frac{4}{x}} < -3 \end{cases} \quad \emptyset$

б) $\begin{cases} 0 > x \geq -1 \\ \sqrt{9-\frac{3}{x}} \leq 3x - \sqrt{3x-\frac{3}{x}} \end{cases} \quad \emptyset \quad \left(3x - \sqrt{3x-\frac{3}{x}} < 0\right)$

Ответ: $\emptyset$.

$$9. \begin{cases} |x-2|-3 \leq \sqrt{3x^2-3} \\ \sqrt{5x-2x^2+3} \leq 3-x \end{cases} \quad D(C.H.): \begin{cases} 3x^2-3 \geq 0 \\ 5x-2x^2+3 \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x^2-3 \geq 0 \\ -(x-3)(2x+1) \geq 0 \end{cases}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{штриховка на } x \text{ от } -1 \text{ до } 1 \\ \text{штриховка на } x \text{ от } -0,5 \text{ до } 3 \end{array} \right.$$

$$\text{штриховка на } x \text{ от } 1 \text{ до } 3 \rightarrow x \quad [1; 3].$$

а) $1 \leq x \leq 2$, значит $|x-2| = 2-x$,

$$|x-2|-3 = |2-x-3| = |-1-x| = |x+1|$$

тогда система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ |x+1| \leq \sqrt{3x^2-3} \\ 5x-2x^2+3 \leq (3-x)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x^2+2x+1 \leq 3x^2-3 \\ 5x-2x^2+3 \leq 9-6x+x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 2x^2-2x-4 \geq 0 \\ 3x^2-11x+6 \geq 0 \end{cases}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{штриховка на } x \text{ от } -1 \text{ до } 2 \\ \text{штриховка на } x \text{ от } 2 \text{ до } 3 \\ \text{штриховка на } x \text{ от } \frac{2}{3} \text{ до } 3 \end{array} \right. \quad \emptyset$$

б) $2 \leq x \leq 3$, $|x-2| = x-2$

$$\text{значит } |x-2|-3 = |x-2-3| = |x-5|$$

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ |x-5| \leq \sqrt{3x^2-3} \\ \sqrt{5x-2x^2+3} \leq 3-x \quad (3-x \geq 0) \end{cases};$$

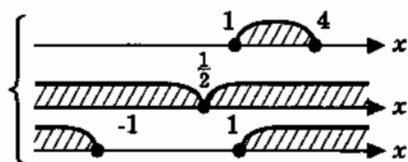
$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ x^2-10x+25 \leq 3x^2-3 \\ -2x^2+5x+3 \leq 9-6x+x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 2x^2+10x-28 \geq 0 \\ 3x^2-11x+6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{штриховка на } x \text{ от } 2 \text{ до } 3 \\ \text{штриховка на } x \text{ от } -7 \text{ до } 2 \\ \text{штриховка на } x \text{ от } \frac{2}{3} \text{ до } 3 \end{array} \right. \quad x = 3$$

Ответ: $\{3\}$.

$$10. \begin{cases} 4x - 5 > \sqrt{1 + 4x(x-1)} + \sqrt{-8x^2 + 40x - 32} \\ \|x + 3| - 2| \leq \sqrt{3x^2 - 3} \end{cases}$$

$$D(\text{С.Н.}): \begin{cases} -8x^2 + 40x - 32 \geq 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \\ 3(x^2 - 1) \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} -8(x^2 - 5x + 4) \geq 0 \\ (2x - 1)^2 \geq 0 \\ 3(x - 1)(x + 1) \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5 > \sqrt{(2x - 1)^2} + \sqrt{-8(x^2 - 5x + 4)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x + 3 - 2|^2 \leq 3x^2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,25 < x \leq 4 \quad (4x - 5 > 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5 > |2x - 1| + \sqrt{-8(x^2 - 5x + 4)} \quad (|2x - 1| = 2x - 1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \leq 3x^2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,25 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{-8(x^2 - 5x + 4)} < 2(x - 2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

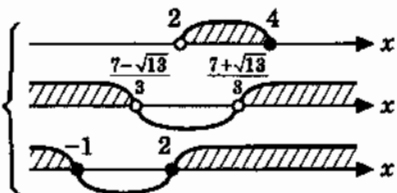
$$\begin{cases} -8x^2 + 40x - 32 < 4(x^2 - 4x + 4); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 14x + 12 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 1) \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{3}; 4 \right].$$

Тренировочная работа 6

$$1. \begin{cases} (x+4)\sqrt{-x^2-9x-14} \geq 0 \\ \sqrt{1+\frac{2}{x+3}} \geq \sqrt{\frac{6}{x+4}} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{\sqrt{-x^2-9x-8}}{2x+1} \leq \frac{\sqrt{-x^2-9x-8}}{x-1} \\ \frac{\sqrt{x+10}-3}{\sqrt{x+10}-2} \leq 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x^2-x+2}{\sqrt{\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}}} \geq 0 \\ \sqrt{\frac{x+7}{2x+7}} < 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{(x-1)\sqrt{10-x}}{\sqrt{19-4x}} \geq 0 \\ \frac{4-2\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} > 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 4\sqrt{\frac{2}{x-1}} + 3 + 5 \leq \frac{3x-1}{x-1} \\ \frac{\sqrt{-x^2+9}}{2x+7} \geq \frac{\sqrt{-x^2+9}}{x+9} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \sqrt{7-|3x-4|} < 2 \\ \frac{4x^2-16x+7}{\sqrt{3(x^2-4x+3)}} \leq \frac{2x-1}{3} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} (x^2-9x+18)(\sqrt{9-2x}-x-3) > 0 \\ \frac{x^2-5x-6}{\sqrt{x^2-6x+5}} < \frac{x+1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} (1-x)\sqrt{\frac{1-5x}{1-x}} < -3 \\ \sqrt{\frac{6-9x}{1-x}} + 3x < 3 - \sqrt{\frac{3x^2-6x}{1-x}} \end{cases}$$

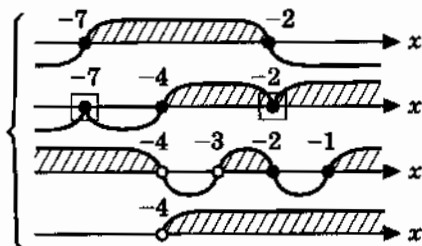
$$9. \begin{cases} ||x-5|-3| \leq \sqrt{3x^2-18x+24} \\ \sqrt{-2x^2+17x-30} \leq 6-x \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x+1 > \sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{-8x^2+8x+16} \\ ||x+5|-2| \leq \sqrt{3x^2+12x+9} \end{cases}$$

Решение тренировочной работы 6

$$1. \begin{cases} (x+4)\sqrt{-x^2-9x-14} \geq 0 \\ \sqrt{1+\frac{2}{x+3}} \geq \sqrt{\frac{6}{x+4}} \end{cases}; \begin{cases} -x^2-9x-14 \geq 0 \\ (x+4)(-x^2-9x-14)^2 \geq 0 \\ 1+\frac{2}{x+3} \geq \frac{6}{x+4} \\ \frac{6}{x+4} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(x+2)(x+7) \geq 0 \\ (x+4)(x+2)^2(x+7)^2 \geq 0 \\ \frac{(x+4)(x+3)+2(x+4)-6(x+3)}{(x+4)(x+3)} \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}; \begin{cases} -(x+2)(x+7) \geq 0 \\ (x+4)(x+2)^2(x+7)^2 \geq 0 \\ \frac{x^2+3x+2}{(x+4)(x+3)} \geq 0 \\ x > -4 \end{cases}$$



Ответ: $(-3; 2]$.

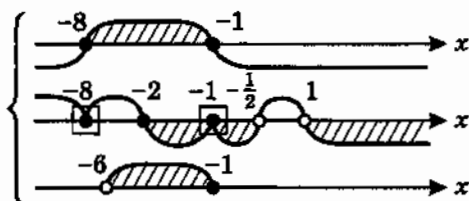
$$2. \begin{cases} \frac{\sqrt{-x^2-9x-8}}{2x+1} \leq \frac{\sqrt{-x^2-9x-8}}{x-1} \\ \frac{\sqrt{x+10}-3}{\sqrt{x+10}-2} \leq 0 \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x+10} = t$ ($t \geq 0$)



$$\begin{cases} \sqrt{-x^2-9x-8} \cdot \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{x-1}\right) \leq 0 \\ \sqrt{x+10} \leq 3 \\ \sqrt{x+10} > 2 \\ \sqrt{-x^2-9x-8} \cdot \frac{x+2}{(2x+1)(1-x)} \leq 0 \\ x+10 \leq 9 \\ x+10 > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 - 9x - 8 \geq 0 \\ \frac{x+2}{(2x+1)(1-x)}(-x^2 - 9x - 8)^2 \leq 0 \\ x \leq -1 \\ x > -6 \end{cases}; \quad \begin{cases} -(x+1)(x+8) \geq 0 \\ \frac{x+2}{(2x+1)(1-x)}(x+1)^2(x+8)^2 \leq 0; \\ -6 < x \leq -1 \end{cases}$$

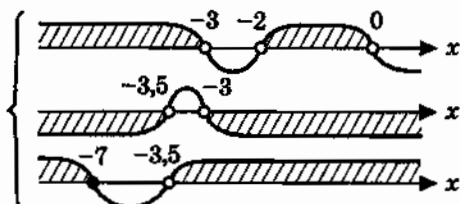


Ответ: $[-2; -1]$.

$$3. \begin{cases} \frac{x^2 - x + 2}{\sqrt{\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3}}} \geq 0 \\ \sqrt{\frac{x+7}{2x+7}} < 2 \end{cases}.$$

Так как $x^2 - x + 2 > 0$; $(x - \frac{1}{2})^2 + 1\frac{3}{4} > 0$ ($\forall x$),

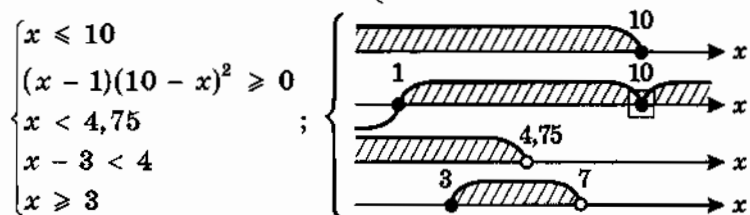
$$\text{то } \begin{cases} \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} > 0 \\ \frac{x+7}{2x+7} < 4 \\ \frac{x+7}{2x+7} \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{-x}{(x+2)(x+3)} > 0 \\ \frac{-7(x+3)}{2x+7} < 0 \\ \frac{x+7}{2x+7} \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -7] \cup (-2; 0)$.

$$4. \begin{cases} \frac{(x-1)\sqrt{10-x}}{\sqrt{19-4x}} \geq 0 \\ \frac{4-2\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} > 0 \end{cases}. \quad \begin{aligned} &\text{Так как } \frac{1}{\sqrt{19-4x}} > 0 \text{ на } (-\infty; 4,75) \\ &\text{и } \sqrt{x-3}+1 > 0 \text{ на } [3; \infty), \end{aligned}$$

$$\text{то } \begin{cases} (x-1)\sqrt{10-x} \geq 0 \\ x < 4,75 \\ 4-2\sqrt{x-3} > 0 \\ x \geq 3 \end{cases} ; \begin{cases} 10-x \geq 0 \\ (x-1)(10-x)^2 \geq 0 \\ x < 4,75 \\ \sqrt{x-3} < 2 \\ x \geq 3 \end{cases} ;$$

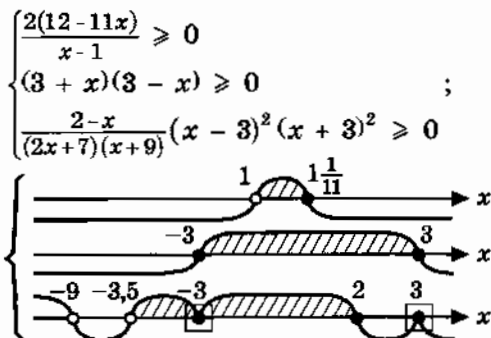


Ответ: $[3; 4,75)$.

$$5. \begin{cases} 4\sqrt{\frac{2}{x-1}} + 3 + 5 \leq \frac{3x-1}{x-1} \\ \sqrt{\frac{-x^2+9}{2x+7}} \geq \frac{\sqrt{-x^2+9}}{x+9} \end{cases} ; \begin{cases} 4\sqrt{\frac{3x-1}{x-1}} + 5 \leq \frac{3x-1}{x-1} \\ \sqrt{-x^2+9} \left(\frac{1}{2x+7} - \frac{1}{x+9} \right) \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{\frac{3x-1}{x-1}} = t$, тогда $4t + 5 \leq t^2$; $t^2 - 4t - 5 \geq 0$;
 $(t-5)(t+1) \geq 0$ ($t+1 > 0$), значит $t \geq 5$.

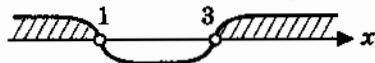
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-1}{x-1}} \geq 5 \\ \sqrt{-x^2+9} \left(\frac{2-x}{(2x+7)(x+9)} \right) \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{3x-1}{x-1} \geq 25 \\ -x^2+9 \geq 0 \\ \frac{2-x}{(2x+7)(x+9)} (-x^2+9)^2 \geq 0 \end{cases} ;$$



Ответ: $\left(1; 1\frac{1}{11}\right]$.

$$6. \begin{cases} \sqrt{7 - |3x - 4|} < 2 \\ \frac{4x^2 - 16x + 7}{\sqrt{3(x^2 - 4x + 3)}} \leq \frac{2x - 1}{3} \end{cases}$$

Из второго неравенства следует, что $x^2 - 4x + 3 > 0$,
т. е. $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) > 0$



а) Пусть $x < 1$, тогда $3x - 4 < 0$, значит $|3x - 4| = 4 - 3x$

$$\begin{cases} \sqrt{7 - 4 + 3x} < 2 \\ 3(4x^2 - 16x + 7) \leq (2x - 1)\sqrt{3(x - 1)(x - 3)}; \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3(x + 1)} < 2 \\ 3(2x - 1)(2x - 7) \leq (2x - 1)\sqrt{3(x - 1)(x - 3)}; \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x + 1) < 4 \\ x + 1 \geq 0 \\ (2x - 1)(3(2x - 7) - \sqrt{3(x - 1)(x - 3)}) \leq 0; \\ x < 1 \end{cases}$$

Так как $2x - 1 < 0$ ($x < \frac{1}{2}$),

$$\text{то } \begin{cases} -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{3(x - 1)(x - 3)} \leq 3(2x - 7) \end{cases} \quad (2x - 7 < 0).$$

б) Пусть $x > 3$, тогда $3x - 4 > 0$, значит $|3x - 4| = 3x - 4$.

$$\begin{cases} x > 3 \\ \sqrt{7 - 3x + 4} < 2 \\ 3(2x - 1)(2x - 7) \leq (2x - 1)\sqrt{3(x - 1)(x - 3)} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ 11 - 3x < 4 \\ 11 - 3x \geq 0 \\ (2x - 1)(3(2x - 7) - \sqrt{3(x - 1)(x - 3)}) \leq 0 \end{cases}$$

Так как при этом $2x - 1 > 0$, то $\begin{cases} 3 < x \leq 3\frac{2}{3} \\ \sqrt{3(x - 1)(x - 3)} \geq 3(2x - 7); \end{cases}$

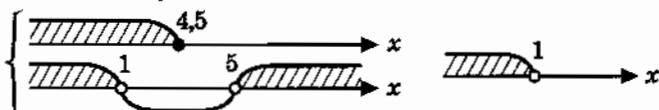
$$\begin{cases} 3 < x \leq 3\frac{2}{3} \\ \begin{cases} x \geq 3,5 \\ 3(x-1)(x-3) \geq 9(4x^2 - 28x + 49); \\ x \leq 3,5 \\ 3(x-1)(x-3) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3,5 \leq x \leq 3\frac{2}{3} \\ 11x^2 - 80x + 144 \leq 0; \\ 3 < x \leq 3,5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3,5 \leq x \leq 3\frac{2}{3} \\ (x-4)(11x-36) \leq 0; \\ 3 < x \leq 3,5 \end{cases}$$

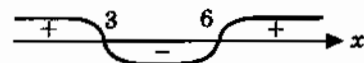
$$\begin{cases} 3,5 \leq x \leq 3\frac{2}{3} \\ 3 < x \leq 3,5 \end{cases} \quad \text{Ответ: } \left(3; 3\frac{2}{3}\right].$$

$$7. \begin{cases} (x^2 - 9x + 18)(\sqrt{9 - 2x} - x - 3) > 0 \\ \frac{x^2 - 5x - 6}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} < \frac{x+1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$D(C.H.): \begin{cases} 9 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (x-3)(x-6)(\sqrt{9-2x} - x - 3) > 0 \\ \frac{(x-6)(x+1)}{\sqrt{(x-1)(x-5)}} < \frac{x+1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

Учитывая, что $y = (x-3)(x-6)$  на промежутке $(-\infty; 1)$ положительна,

$$\text{имеем: } \begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{9-2x} > x+3 \\ (x-6)(x+1)2\sqrt{3} < (x+1)\sqrt{(x-1)(x-5)} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{9-2x} > x+3 \\ (x+1)(2\sqrt{3}(x-6) - \sqrt{(x-1)(x-5)}) < 0 \\ (2\sqrt{3}(x-6) - \sqrt{(x-1)(x-5)}) < 0 \end{cases};$$

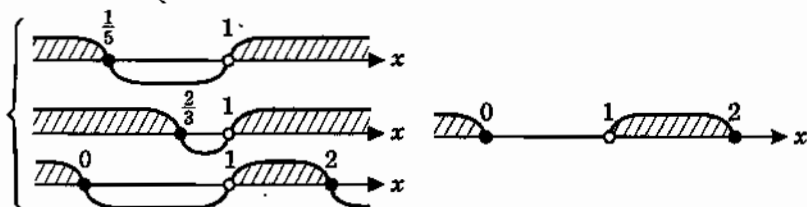
$$\begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{9-2x} > x+3. \text{ Так как } x+3 > 0, \\ (x+1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{то } \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 9-2x > x^2+6x+9; \end{cases} \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2+8x < 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 0)$.

$$8. \begin{cases} (1-x)\sqrt{\frac{1-5x}{1-x}} < -3 \\ \sqrt{\frac{6-9x}{1-x}} + 3x < 3 - \sqrt{\frac{3x^2-6x}{1-x}} \end{cases}$$

$$D(C.H.): \begin{cases} \frac{1-5x}{1-x} \geq 0 \\ \frac{6-9x}{1-x} \geq 0 \\ \frac{3x^2-6x}{1-x} \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{5x-1}{x-1} \geq 0 \\ \frac{3(3x-2)}{x-1} \geq 0 \\ \frac{3x(x-2)}{1-x} \geq 0 \end{cases}$$



Рассмотрим неравенства отдельно на каждом из участков:

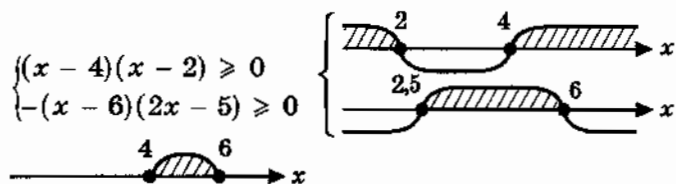
$$a) \begin{cases} x \leq 0 \\ (1-x)\sqrt{\frac{1-5x}{1-x}} < -3 \end{cases} \quad \emptyset \quad (1-x > 0)$$

$$b) \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ \sqrt{\frac{6-9x}{1-x}} + \sqrt{\frac{3x^2-6x}{1-x}} + 3x < 3 \end{cases} \quad \emptyset \quad (3 < 3x \leq 6)$$

Ответ: $\emptyset$.

$$9. \begin{cases} ||x-5|-3| \leq \sqrt{3x^2-18x+24} \\ \sqrt{-2x^2+17x-30} \leq 6-x \end{cases}$$

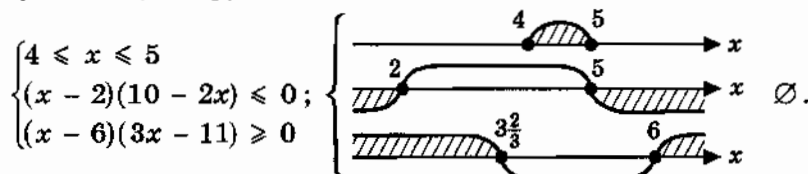
$$D(C.H.): \begin{cases} 3x^2-18x+24 \geq 0 \\ -2x^2+17x-30 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2-6x+8 \geq 0 \\ -(2x^2-17x+30) \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{a) } \begin{cases} 4 \leq x \leq 5 \\ |5-x-3| \leq \sqrt{3(x-4)(x-2)} \\ -2x^2 + 17x - 30 \leq (6-x)^2 \quad (6-x > 0) \end{cases}$$

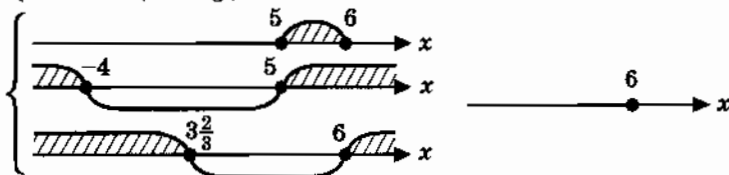
$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 5 \\ (2-x)^2 \leq 3(x-4)(x-2); \\ 3x^2 - 29x + 66 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 5 \\ (x-2)(x-2-3(x-4)) \leq 0; \\ 3(x-6)(x-\frac{11}{3}) \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{б) } \begin{cases} 5 \leq x \leq 6 \\ |x-5-3| \leq \sqrt{3(x-4)(x-2)}; \\ -2x^2 + 17x - 30 \leq (6-x)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 5 \leq x \leq 6 \\ (x-8)^2 \leq 3(x-4)(x-2); \\ 3x^2 - 29x + 66 \geq 0 \end{cases}$$

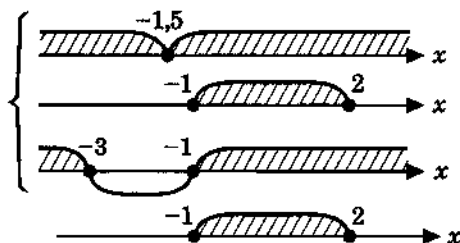
$$\begin{cases} 5 \leq x \leq 6 \\ 2x^2 - 2x - 40 \geq 0; \\ 3(x-6)(x-\frac{11}{3}) \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 5 \leq x \leq 6 \\ 2(x-5)(x+4) \geq 0; \\ (x-6)(3x-11) \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: {6}.

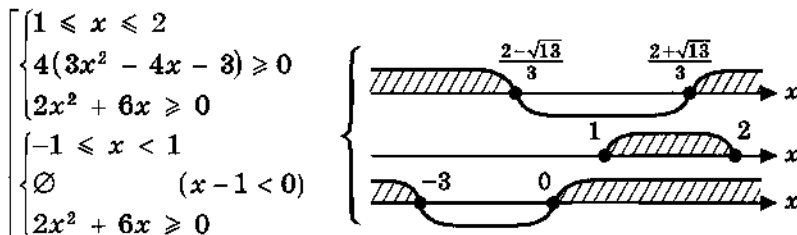
$$10. \begin{cases} 4x + 1 > \sqrt{4x^2 + 12x + 9} + \sqrt{-8x^2 + 8x + 16} \\ |x + 5| - 2 \leq \sqrt{3x^2 + 12x + 9} \end{cases}$$

$$D(C.H.): \begin{cases} 4x^2 + 12x + 9 \geq 0 \\ -8x^2 + 8x + 16 \geq 0; \\ 3x^2 + 12x + 9 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} (2x + 3)^2 \geq 0 \\ -8(x^2 - x - 2) \geq 0; \\ 3(x^2 + 4x + 3) \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 4x + 1 \geq |2x + 3| + \sqrt{-8(x - 2)(x + 1)} \quad (|2x + 3| = 2x + 3) \\ |x + 5 - 2| \leq \sqrt{3(x + 1)(x + 3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 \geq \sqrt{-8(x - 2)(x + 1)}; \\ |x + 3| \leq \sqrt{3(x + 1)(x + 3)} \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 4(x - 1)^2 \geq -8(x - 2)(x + 1) \\ (x + 3)^2 \leq 3(x + 1)(x + 3) \\ -1 \leq x < 1 \\ 2(x - 1) \geq \sqrt{-8(x - 2)(x + 1)} \\ (x + 3)^2 \leq 3(x + 1)(x + 3) \end{cases};$$



$$\text{Ответ: } \left[\frac{2 + \sqrt{13}}{3}; 2 \right].$$

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

$$1. \begin{cases} \frac{\sqrt{18+3x-x^2}}{4-x} \geq 0 \\ \sqrt{12} \geq \sqrt{x^2-4x} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{3x^2+19x+6}{\sqrt{20-x-x^2}} \geq 0 \\ \frac{7\sqrt{3-x}}{15} < \frac{8\sqrt{3-x+9}}{14} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} (x^2-4x-32)\sqrt{169-x^2} \leq 0 \\ (x^2-3x-28)\sqrt{13-x} \leq 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \sqrt{\frac{19-x}{7+x}} + 10\sqrt{\frac{7+x}{19-x}} \leq 7 \\ \sqrt{16-x} + \sqrt{4+x} < 6 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \sqrt{3x^2-6x+7} \geq 2x+7 \\ \frac{(x-2)\sqrt{x^2-5x+4}}{5-x} \leq 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \sqrt{6-x} - |x-5| + \sqrt{x-4} \geq 2 \\ \sqrt{x^3-5x^2+6x} \geq x-2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2+5x+6 < 3\sqrt{(x+1)(x+4)} \\ \sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+5} < \sqrt{4x+7} + \sqrt{5x+9} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + 1 < \sqrt{2x-1} \\ x^2 + 4x\sqrt{x-1} \leq 12(x-1) \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \\ \sqrt{x^3+3x} > x^2-6x+3 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \sqrt{9-\frac{9}{x}} < x - \sqrt{x-\frac{9}{x}} \\ \frac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \leq \sqrt{4x-3} \end{cases}$$

Вариант 2

$$1. \begin{cases} \frac{\sqrt{18-3x-x^2}}{4+x} \geq 0 \\ \sqrt{12} \geq \sqrt{x^2+4x} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{3x^2-19x+6}{\sqrt{20+x-x^2}} \geq 0 \\ \frac{7\sqrt{3+x}}{15} < \frac{8\sqrt{3+x+9}}{14} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} (x^2+3x-28)\sqrt{13+x} \leq 0 \\ (x^2+4x-32)\sqrt{169-x^2} \leq 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 10\sqrt{\frac{7-x}{19+x}} + \sqrt{\frac{19+x}{7-x}} \leq 7 \\ \sqrt{4-x} + \sqrt{x+16} < 6 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{(x+2)\sqrt{x^2+5x+4}}{x+5} \geq 0 \\ \sqrt{3x^2+6x+7} \geq 7-2x \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \sqrt{6-2x} - |2x-5| + \sqrt{2x-4} \geq 2 \\ \sqrt{2x^3-5x^2+3x} \geq x-1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2-5x+6 < 3\sqrt{(x-1)(x-4)} \\ \sqrt{3-2x} + \sqrt{5-3x} < \sqrt{7-4x} + \sqrt{9-5x} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x - \frac{1}{4x} + 1 < \sqrt{4x-1} \\ x^2 + 2x\sqrt{2x-1} \leq 3(2x-1) \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \sqrt{4-\sqrt{12+2x}} < \sqrt{8+x} \\ \sqrt{2x^3+24x} > x^2-12x+12 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3\sqrt{1-\frac{2}{x}} < 0,5x - \sqrt{0,5x - \frac{18}{x}} \\ \frac{x^3-64+12x(4-x)}{8|3-2x|} \leq \sqrt{2x-3} \end{cases}$$

4

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4.$

2. $\sqrt{x^2+x+7} + \sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{3x^2+3x+9}.$

3. $\sqrt[3]{3+2x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{12(x+1)}.$

4. $3\sqrt{-x^2+x+6} > -2(2x-1).$

5. $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} \leq 3.$

Карточка 2

1. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+2} = 4.$

2. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1.$

3. $\sqrt[4]{77-x} + \sqrt[4]{20+x} = 5.$

4. $\sqrt{x^2-5x+6} < 2x-3.$

5. $\frac{4x+3+\sqrt{2-x}}{x} \geq 2.$

Карточка 3

1. $\sqrt{4x-1} - \sqrt{x-2} = 3.$
2. $\sqrt{x^3+x^2-1} + \sqrt{x^3+x^2+2} = 3.$
3. $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{-x} = 3+x.$
4. $\frac{\sqrt{x+2}}{x} < 1.$
5. $(x^2-4x+3)\sqrt{x+1} \leq x^2-2x-3.$

Карточка 4

1. $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5.$
2. $\sqrt{6-x} + \sqrt{x-2} + 2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)} = 2.$
3. $\sqrt[3]{2x(4x^2+3)-1-12x^2} + x = x^2-11.$
4. $\sqrt{3x^2-22x-16} > 2x-7.$
5. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} > 1;$

Карточка 5

1. $\sqrt{5x+7} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+3}.$
2. $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} = 6.$
3. $\sqrt{8-x+2\sqrt{7-x}} + \sqrt{1-x-\sqrt{7-x}} = 4.$
4. $\sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}.$
5. $(\sqrt{x+3} + x-3)(\sqrt{4x+5} + x-4) \leq 0.$

Карточка 6

1. $\sqrt{x+4} + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+20}.$
2. $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2+18} = 5.$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1.$
4. $\sqrt{-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$
5. $(x^2+4x+3)\sqrt{1-x} \leq x^2+2x-3.$

Решение карточки 1

1. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4.$

Перенесем $\sqrt{2x-3}$ в правую часть и возведем в квадрат обе части уравнения:

$$4x + 1 = 16 - 8\sqrt{2x-3} + 2x - 3$$

$$\text{или } 4\sqrt{2x-3} = 6 - x.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения еще раз:

$$16(2x-3) = 36 - 12x + x^2;$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 42 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь числа 42 и 2. Сделав проверку, убеждаемся, что число 2 является его корнем, а 42 не является его корнем.

Ответ: $x = 2.$

2. $\sqrt{x^2+x+7} + \sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{3x^2+3x+9}.$

Выполним подстановку $\sqrt{x^2+x+2} = t \geq 0.$

Тогда $x^2+x+2 = t^2$; $x^2+x+7 = t^2+5$;

$$3x^2+3x+9 = 3t^2+3.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$t + \sqrt{t^2+5} = \sqrt{3t^2+3}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$t^2 + 2t\sqrt{t^2+5} + t^2 + 5 = 3t^2 + 3 \Leftrightarrow 2t\sqrt{t^2+5} = t^2 - 2.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$$4t^2(t^2+5) = t^4 - 4t^2 + 4; \quad 3t^4 + 24t^2 - 4 = 0.$$

Числа $\frac{-12+2\sqrt{39}}{3}$ и $\frac{-12-2\sqrt{39}}{3}$ являются корнями уравнения $3t^4 + 24t^2 - 4 = 0$ относительно t^2 .

Заметим, что $\frac{-12+2\sqrt{39}}{3} \in [0; \infty)$, а $-\frac{12+2\sqrt{39}}{3} \notin [0; \infty)$

Тогда $t^2 = \frac{2\sqrt{39}-12}{3}$.

Возвращаясь к переменной x , получаем:

$$x^2 + x + 2 = \frac{2\sqrt{39}-12}{3}.$$

Анализируя полученное уравнение, убеждаемся, что

$$\frac{2\sqrt{39}-12}{3} < 1, \text{ так как } 2\sqrt{39} < 15, \text{ но } x^2 + x + 2 > 1,$$

так как $x^2 + x + 1 > 0$ для любых x .

Следовательно, заданное уравнение решений не имеет.

Ответ: решения нет.

3. $\sqrt[3]{3+2x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{12(x+1)}.$

Напомним, что $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$3 + 2x + x + 3\sqrt[3]{3+2x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{3+2x} + \sqrt[3]{x}) = 12(x+1).$$

Заменим $\sqrt[3]{3+2x} + \sqrt[3]{x}$ на $\sqrt[3]{12(x+1)}$, тогда

$$3 + 3x + 3\sqrt[3]{3+2x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{12(x+1)} = 12(x+1).$$

Поделим почленно на 3:

$$\sqrt[3]{3+2x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{12(x+1)} = 3(x+1).$$

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$(3+2x)x \cdot 12(x+1) = 27(x+1)^3 \Leftrightarrow$$

$$3(x+1)((3+2x)x \cdot 4 - 9(x+1)^2) = 0;$$

$$3(x+1)(x^2 + 6x + 9) = 0.$$

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь числа -1 и -3 .

Сделав проверку, убеждаемся, что числа -1 и -3 действительно являются его корнями.

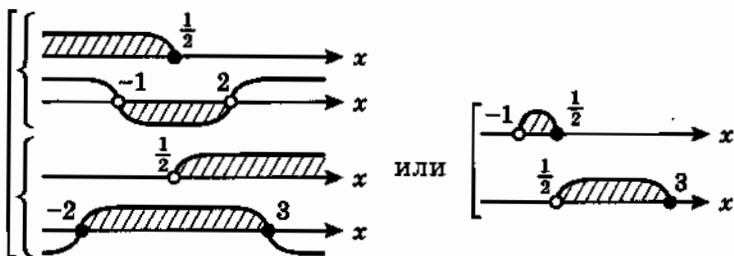
Ответ: $\{-1; -3\}$.

$$4. 3\sqrt{-x^2 + x + 6} > -2(2x - 1).$$

Данное неравенство равносильно $3\sqrt{-x^2 + x + 6} > 2 - 4x$, что, в свою очередь, равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 2 - 4x \geq 0 \\ 9(-x^2 + x + 6) > 4 - 16x + 16x^2 \\ 2 - 4x < 0 \\ -x^2 + x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 25x^2 - 25x - 50 < 0 \\ x > \frac{1}{2} \\ -(x-3)(x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 25(x+1)(x-2) < 0 \\ x > \frac{1}{2} \\ -(x-3)(x+2) \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $(-1; 3]$.

$$5. \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} \leq 3.$$

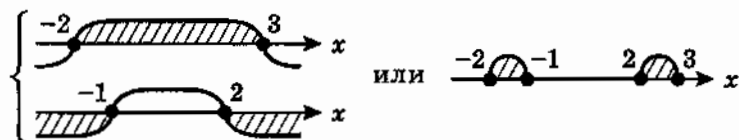
Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x + 2 + 2\sqrt{(x+2)(3-x)} + 3 - x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \\ \sqrt{-x^2 + x + 6} \leq 2 \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части последнего неравенства и решим уравнение $-x^2 + x + 2 = 0$:

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \\ -(x-2)(x+1) \leq 0 \end{cases}.$$



Ответ: $[-2; -1] \cup [2; 3]$.

Решение карточки 2

$$1. \sqrt{x-1} + \sqrt{2x+2} = 4.$$

Перенесем $\sqrt{x-1}$ в правую часть и возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\sqrt{2x+2} = 4 - \sqrt{x-1}, \text{ тогда}$$

$$2x + 2 = 16 - 8\sqrt{x-1} + x - 1.$$

Перенесем $2x + 2$ в правую часть, а $8\sqrt{x-1}$ — в левую, и еще раз возведем в квадрат обе части получившегося уравнения $8\sqrt{x-1} = 13 - x$:

$$64(x-1) = 169 - 26x + x^2.$$

Следовательно, решениями исходного уравнения могут быть числа $45 + \sqrt{1792}$ и $45 - \sqrt{1792}$.

Сделать проверку технически очень сложно, поэтому проверим равносильность переходов.

$$a) \sqrt{2x+2} = 4 - \sqrt{x-1}.$$

Условием равносильности перехода является

$$4 - \sqrt{x-1} \geq 0,$$

то есть чтобы $\sqrt{x-1} \leq 4$.

$$\sqrt{x-1} \leq 4 \text{ выполняется при } 1 \leq x \leq 17.$$

$x = 45 + \sqrt{1792}$ не принадлежит промежутку $[1; 17]$.

Принадлежит ли $45 - \sqrt{1792}$ данному промежутку?

Так как $45 - \sqrt{1792} = 45 - 16\sqrt{7}$ и $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$, то $41,6 < 16\sqrt{7} < 43,2$;

тогда $41,6 < \sqrt{1792} < 43,2$; $-41,6 > -\sqrt{1792} > -43,2$;

прибавим к обеим частям число 45, получим

$$3,4 > 45 - \sqrt{1792} > 1,8.$$

Следовательно, $x = 45 - \sqrt{1792} \in [1; 17]$.

б) Если учесть, что из $8\sqrt{x-1} = 13 - x$ следует требование $x \leq 13$, то необходимо проверить и истинность того, что $45 - 16\sqrt{7} \in [1; 13] \subset D(y) = [1; \infty)$.

Но $45 - 16\sqrt{7} < 13$, так как $1,8 < 45 - \sqrt{1792} < 3,4$.

Ответ: $\{45 - \sqrt{1792}\}$.

$$2. \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = x - 1.$$

Так как

$$x + 2\sqrt{x-1} = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} + 1)^2$$

$$\text{и } x - 2\sqrt{x-1} = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} - 1)^2,$$

$$\text{то } |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| = x - 1. \quad (1)$$

Возможны два случая:

1) $\sqrt{x-1} \geq 1$, то есть $x \geq 2$.

$$\text{Значит, } \begin{cases} |\sqrt{x-1} - 1| = \sqrt{x-1} - 1 \\ |\sqrt{x-1} + 1| = \sqrt{x-1} + 1 \end{cases} \text{ на } [2; \infty).$$

Тогда уравнение (1) приобретает вид:

$$\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = x - 1;$$

$$2\sqrt{x-1} - (x - 1) = 0;$$

$$\sqrt{x-1}(2 - \sqrt{x-1}) = 0; \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1 \Leftrightarrow x = 5. \\ x = 5 \end{cases}$$

2) $\sqrt{x-1} \leq 1$, т. е. $1 \leq x \leq 2$, следовательно,

$$|\sqrt{x-1} - 1| = 1 - \sqrt{x-1}.$$

Тогда

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$$

Ответ: $x = 5$.

$$3. \sqrt[4]{77-x} + \sqrt[4]{20+x} = 5.$$

Выполним подстановку: $\sqrt[4]{20+x} = t \geq 0$.

Тогда $20+x = t^4$; $x = t^4 - 20$; $77-x = 97-t^4$.

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt[4]{97-t^4} = 5-t \quad (t \leq 5).$$

Возведем обе части уравнения в четвертую степень:

$$\begin{aligned} 97-t^4 &= 625 - 4 \cdot 5^3 \cdot t + 6 \cdot 5^2 \cdot t^2 - 4 \cdot 5 \cdot t^3 + t^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^4 - 10t^3 + 75t^2 - 250t + 264 &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим $f(t) = t^4 - 10t^3 + 75t^2 - 250t + 264$.

Заметим, что $f(3) = 0$, тогда

$$\begin{array}{r|l} t^4 - 10t^3 + 75t^2 - 250t + 264 & t - 3 \\ \hline t^4 - 3t^3 & t^3 - 7t^2 + 54t - 88 \\ \hline -7t^3 + 75t^2 & \\ -7t^3 + 21t^2 & \\ \hline -54t^2 - 250t & \\ -54t^2 - 162t & \\ \hline -88t + 264 & \\ -88t + 264 & \end{array}$$

Обозначим $\varphi(t) = t^3 - 7t^2 + 54t - 88$, $\varphi(2) = 0$, тогда

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 7t^2 + 54t - 88 & t - 2 \\ \hline t^3 - 2t^2 & t^2 - 5t + 44 \\ \hline -5t^2 + 54t & \\ -5t^2 + 10t & \\ \hline -44t - 88 & \\ -44t - 88 & \end{array}$$

Запишем левую часть уравнения в виде произведения

$$(t-3)(t-2)(t^2-5t+44) = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} t=3 \\ t=2 \end{matrix} \right] \in [0; 5].$$

Уравнение $t^2 - 5t + 44 = 0$ решений не имеет, так как его дискриминант $D < 0$.

Возвращаясь к переменной x , получаем:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{20+x} = 3 \\ \sqrt[4]{20+x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 61 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-4; 61\}$.

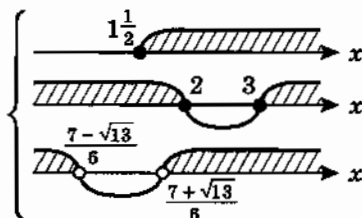
4. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} < 2x - 3$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,5 \\ (x-2)(x-3) \geq 0 \\ 3x^2 - 7x + 3 > 0 \end{cases}.$$

Числа $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$ и $\frac{7-\sqrt{13}}{6}$ — корни уравнения

$$3x^2 - 7x + 3 = 0.$$



Ответ: $\left(\frac{7+\sqrt{13}}{6}; 2\right] \cup [3; \infty)$.

5. $\frac{4x+3+\sqrt{2-x}}{x} \geq 2$.

Перенесем 2 в левую часть и приведем к общему знаменателю:

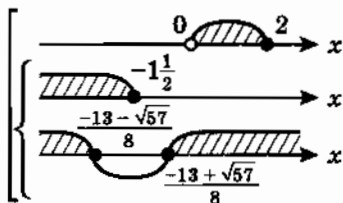
$$\frac{2x+3+\sqrt{2-x}}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3+\sqrt{2-x} \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3+\sqrt{2-x} \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x} \geq -2x-3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ -2x-3 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x < 0 \\ 2-x \leq 4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \leq -1,5 \\ x \leq 2 \\ x < 0 \\ 4x^2+13x+7 \geq 0 \end{cases}.$$

Числа $-\frac{13+\sqrt{57}}{8}$ и $-\frac{13-\sqrt{57}}{8}$ — корни уравнения $4x^2+13x+7=0$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \leq -1,5 \\ x \leq 2 \\ x < 0 \\ 4\left(x + \frac{13+\sqrt{57}}{8}\right)\left(x - \frac{\sqrt{57}-13}{8}\right) \geq 0 \end{cases}.$$



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{13+\sqrt{57}}{8}\right] \cup (0; 2]$.

Решение карточки 3

1. $\sqrt{4x-1} - \sqrt{x-2} = 3.$

$$D(Y): \begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Перенесем $\sqrt{x-2}$ в правую часть и возведем обе части уравнения

$\sqrt{4x-1} = 3 + \sqrt{x-2}$ в квадрат:

$$4x-1 = 9 + 6\sqrt{x-2} + x-2 \text{ или } 6\sqrt{x-2} = 3x-8.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$$9x^2 - 84x + 136 = 0.$$

Решения последнего уравнения: $\frac{42+6\sqrt{15}}{9}$ и $\frac{42-6\sqrt{15}}{9}$ могут быть решениями и исходного уравнения.

Проверим равносильность переходов.

1) $3 + \sqrt{x-2} \geq 0$, для $x \in [2, \infty)$ (учитывая $D(Y)$) — первый переход. Корни $\frac{42+6\sqrt{15}}{9} \in [2, \infty)$.

2) $3x - 8 \geq 0$; для $x \geq 2\frac{2}{3}$ — второй переход.

$$\text{Корень } \frac{42+6\sqrt{15}}{9} \in \left[2\frac{2}{3}; \infty\right).$$

Принадлежит ли данному промежутку число $\frac{42-6\sqrt{15}}{9}$?

$$\frac{42-6\sqrt{15}}{9} - \frac{8}{3} = \frac{18-6\sqrt{15}}{9} < 0,$$

$$\text{т. е. } \frac{42-6\sqrt{15}}{9} \notin \left[2\frac{2}{3}; \infty\right).$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{42+6\sqrt{15}}{9}.$$

2. $\sqrt{x^3+x^2-1} + \sqrt{x^3+x^2+2} = 3.$

Выполним подстановку: $\sqrt{x^3+x^2-1} = t \geq 0$.

Тогда $x^3+x^2-1 = t^2$; $x^3+x^2+2 = t^2+3$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt{t^2+3} = 3-t$.

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} t^2 + 3 = 9 - 6t + t^2 \\ 3 - t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t \leq 3 \end{cases} \Rightarrow t = 1.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{x^3 + x^2 - 1} = 1 \text{ или } x^3 + x^2 - 2 = 0.$$

Пусть $f(x) = x^3 + x^2 - 2$.

$f(1) = 0$, т. е. $f(x)$ кратно $(x - 1)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 2 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 2x^2 - 2 \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ 2x - 2 \\ \underline{2x - 2} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 1 \\ x^2 + 2x + 2 \end{array}$$

Уравнение $x^2 + 2x + 2$ корней не имеет ($D < 0$).

$x = 1$ — единственное решение.

Ответ: $x = 1$.

$$3. \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{2 - x} + \sqrt{-x} = 3 + x.$$

Выполним подстановки: $\sqrt{2 - x} = a \geq 0$ и $\sqrt{-x} = b \geq 0$.

Тогда $x = -b^2$; $x = 2 - a^2$; $a^2 - b^2 = 2$.

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} ab + a + b = -b^2 + 3 \\ a^2 - b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)(b + 1) = 3 \\ (a + b)(a - b) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{3}{b+1} \\ (a - b)\frac{3}{b+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3}{b+1} \\ 3a - 3b = 2b + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3}{b+1} \\ a = \frac{5b+2}{3} \end{cases}$$

Подставляя найденное значение a в первое уравнение, находим, чему равно b .

Решая уравнение $8b^2 + 10b - 7 = 0$, убеждаемся, что это — числа $\frac{1}{2}$ и $-\frac{7}{4}$, причем $-\frac{7}{4} \notin [0; \infty)$.

Тогда, возвращаясь к переменной x , получаем

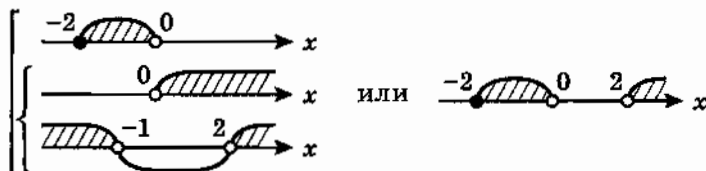
$$\sqrt{-x} = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{4}$.

4. $\frac{\sqrt{x+2}}{x} < 1$.

Перенесем число 1 в левую часть неравенства и приведем к общему знаменателю: $\frac{\sqrt{x+2}-x}{x} < 0$, что равносильно совокупности систем

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+2} > x \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ x > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x < 0 \\ (x-2)(x+1) > 0 \end{array} \right.$$



Ответ: $[-2; 0) \cup (2; \infty)$.

5. $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x+1} \leq x^2 - 2x - 3$.

Разложим на множители трехчлены $x^2 - 4x + 3$ и $x^2 - 2x - 3$:

$$(x-3)(x-1)\sqrt{x+1} - (x-3)(x+1) \leq 0;$$

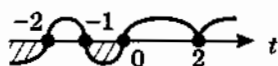
$$(x-3)\sqrt{x+1}(x-1-\sqrt{x+1}) \leq 0.$$

Выполним подстановку: $\sqrt{x+1} = t \geq 0$.

Тогда $x+1 = t^2$; $x-3 = t^2-4$; $x-1 = t^2-2$.

Неравенство примет вид

$$(t^2-4)t(t^2-2-t) \leq 0; \quad (t-2)(t+2)t(t-2)(t+1) \leq 0.$$



Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} \leq -2 \\ \sqrt{x+1} \leq 0 \\ \sqrt{x+1} \geq -1 \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \geq -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

Решение карточки 4

1. $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5.$

Перенесем $\sqrt{x+4}$ в правую часть и возведем в квадрат обе части уравнения:

$$2x - 6 = 25 - 10\sqrt{x+4} + x + 4; \quad 10\sqrt{x+4} = 35 - x,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} 35 - x \geq 0 \\ 100(x+4) = 1225 - 70x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 35 \\ x^2 - 170x + 825 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 35 \\ \begin{cases} x = 165. \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $x = 5.$

2. $\sqrt{6-x} + \sqrt{x-2} + 2\sqrt{(6-x)(x-2)} = 2.$

Выполним подстановки: $\sqrt{6-x} = a \geq 0$

и $\sqrt{x-2} = b \geq 0.$

Тогда $6-x = a^2; \quad x-2 = b^2; \quad a^2 + b^2 = 4.$

Получаем систему $\begin{cases} a + b + 2\sqrt{ab} = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}.$

Заменим

$$\begin{cases} a + b = t \\ \sqrt{ab} = z \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = t^2 - 2z^2.$$

Система примет вид

$$\begin{cases} t + 2z = 2 \\ t^2 - 2z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2(1-z) \\ (2(1-z))^2 - 2z^2 = 4 \end{cases}.$$

Решая систему, находим корни:

$$\begin{cases} z = 4 \\ t = -6 \\ z = 0 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменным a и b , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{ab} = 4 \\ a + b = -6 \notin (0; \infty] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ \sqrt{ab} = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{6-x} = 0 \\ \sqrt{x-2} = 2 \\ \sqrt{x-2} = 0 \\ \sqrt{6-x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{2; 6\}$.

3. $\sqrt[3]{2x(4x^2 + 3) - 1 - 12x^2} + x = x^2 - 11.$

Напомним, что $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

Преобразуем подкоренное выражение:

$$2x(4x^2 + 3) - 1 - 12x^2 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3.$$

Исходное уравнение равносильно

$$\sqrt[3]{(2x - 1)^3} + x = x^2 - 11; \quad 2x - 1 + x = x^2 - 11.$$

Решая квадратное уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$, находим его корни: 5 и -2.

Ответ: $\{-2; 5\}$.

4. $\sqrt{3x^2 - 22x - 16} > 2x - 7.$

Данное неравенство равносильно совокупности систем

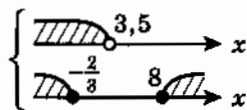
$$\begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ 3x^2 - 22x - 16 > 4x^2 - 28x + 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 < 0 \\ 3x^2 - 22x - 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3,5 \\ x^2 - 6x + 65 < 0 \\ x < 3,5 \\ 3x^2 - 22x - 16 \geq 0 \end{cases}.$$

Уравнение $x^2 - 6x + 65 = 0$ корней не имеет ($D < 0$).

Числа 8 и $-\frac{2}{3}$ — корни уравнения $3x^2 - 22x - 16 = 0$.

Получаем: $\begin{cases} x < 3,5 \\ 3(x - 8)(x + \frac{2}{3}) \geq 0 \end{cases}$



Ответ: $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup (3,5; 8]$.

5. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} > 1$.

Перенесем $\sqrt{x-1}$ в правую часть уравнения:

$$\sqrt{x+2} > 1 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x+2 > 1 + 2\sqrt{x-1} + x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} < 1 \end{cases}$$

После возведения в квадрат получим:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases}$$

Ответ: $[1; 2)$.

Решение карточки 5

$$1. \sqrt{5x+7} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+3}.$$

$$\sqrt{5x+7} = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 3x+1 + \\ &+ 2\sqrt{(3x+1)(x+3)} + x+3; \end{aligned}$$

$$2\sqrt{(3x+1)(x+3)} = x+3.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$$4(3x+1)(x+3) = x^2 + 6x + 9.$$

Корнями уравнения $11x^2 + 34x + 3 = 0$ являются числа $-\frac{1}{11}$ и -3 , но $-3 \notin [-\frac{1}{3}; \infty)$. Проверка подстановкой подтверждает, что $x = -\frac{1}{11}$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = -\frac{1}{11}$.

$$2. \sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} = 6.$$

Выполним подстановку $\sqrt{12-x} = a \geq 0$.

Тогда $12-x = a^2$; $x = 12 - a^2$; $x+24 = 36 - a^2$.

Исходное уравнение примет вид: $\sqrt[3]{36-a^2} = 6-a$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$36 - a^2 = 6^3 - 3 \cdot 6^2 \cdot a + 3 \cdot 6 \cdot a^2 - a^3;$$

$$a^3 - 19a^2 + 108a - 180 = 0.$$

Пусть $f(a) = a^3 - 19a^2 + 108a - 180$.

$f(3) = 0$, т. е. $f(a)$ кратно $(a-3)$.

Получаем

$$(a-3)(a^2 - 16a + 60) = 0; \quad \begin{cases} a = 3 \\ a = 6 \\ a = 10 \end{cases}.$$

$$D(y): \begin{cases} 5x+7 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{7}{5} \\ x \geq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq -3 \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{12-x} = 3 \\ \sqrt{12-x} = 6 \\ \sqrt{12-x} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-x = 9 \\ 12-x = 36 \\ 12-x = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -24 \\ x = -88 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-88; -24; 3\}$.

$$3. \sqrt{8-x+2\sqrt{7-x}} + \sqrt{1-x-\sqrt{7-x}} = 4.$$

Выполним подстановку $\sqrt{7-x} = t \geq 0$.

Тогда $7-x = t^2$; $1-x = t^2 - 6$; $8-x = t^2 + 1$.

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2+1+2t} + \sqrt{t^2-t-6} = 4; \quad |t+1| + \sqrt{t^2-t-6} = 4,$$

но так как $t \geq 0$, то

$$t+1 + \sqrt{t^2-t-6} = 4; \quad \sqrt{t^2-t-6} = 3-t.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3-t \geq 0 \\ t^2-t-6 = 9-6t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = 3 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{7-x} = 3 \Rightarrow 7-x = 9; \quad x = -2.$$

Ответ: $x = -2$.

$$4. \sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}.$$

Перенесем $\sqrt{-3-2x}$ в левую часть неравенства:

$\sqrt{2-x} + \sqrt{-3-2x} > \sqrt{7-x}$, что равносильно системе

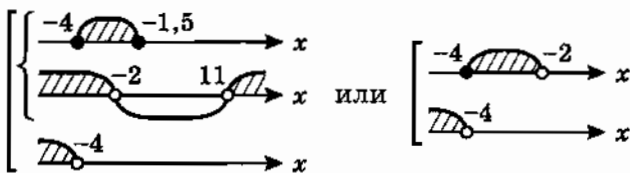
$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ -3-2x \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x+2\sqrt{(2-x)(-3-2x)}-3-2x > 7-x \\ \sqrt{2x^2-x-6} > 4+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1,5 \\ x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 6 > x^2 + 8x + 16. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1,5 \\ 4 + x < 0 \end{cases}$$

Числа -2 и 11 — корни уравнения $x^2 - 9x - 22 = 0$, следовательно,

$$\begin{cases} -4 \leq x \leq -1,5 \\ (x + 2)(x - 11) > 0. \\ x < -4 \end{cases}$$



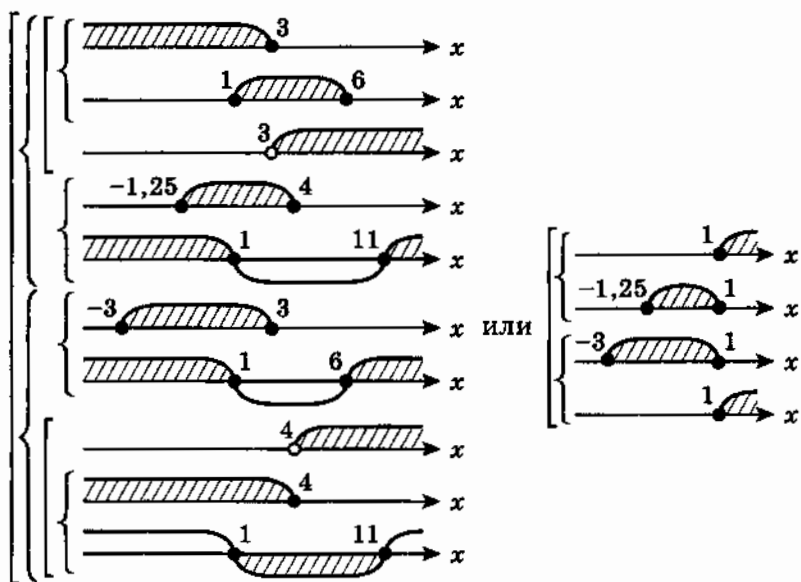
Ответ: $(-\infty; -2)$.

5. $(\sqrt{x+3} + x - 3)(\sqrt{4x+5} + x - 4) \leq 0$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} \geq 3-x \\ \sqrt{4x+5} \leq 4-x \\ \sqrt{x+3} \leq 3-x \\ \sqrt{4x+5} \geq 4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+3 \geq 9-6x+x^2 \\ 3-x < 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 4x+5 \geq 0 \\ 4x+5 \leq 16-8x+x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+3 \leq 9-6x+x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x < 0 \\ 4x+5 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 4x+5 \geq 16-8x+x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ x \geq -3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x \geq -1,25 \end{array} \right. \\ x^2 - 12x + 11 \geq 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3 \\ (x-1)(x-6) \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq 4 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1,25 \\ (x-1)(x-11) \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3 \\ x \geq -3 \end{array} \right. \\ (x-1)(x-6) \geq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x > 4 \\ x \geq -1,25 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq 4 \\ (x-1)(x-11) \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



т. е. $x = 1$.

Данное неравенство можно решить значительно проще.

Выполним подстановку: $\sqrt{x+3} = a \geq 0$

и $\sqrt{4x+5} = b \geq 0$.

Тогда $x+3 = a^2$; $x-3 = a^2-6$;

$4x+5 = b^2$; $x = \frac{b^2-5}{4}$; $x-4 = \frac{b^2-21}{4}$.

Исходное неравенство примет вид:

$$(a^2 + a - 6)\left(b + \frac{b^2-21}{4}\right) \leq 0;$$

$$(a+3)(a-2)(b^2+4b-21) \leq 0;$$

$$(a+3)(a-2)(b+7)(b-3) \leq 0.$$

Так как $a+3 > 0$, $b+7 > 0$, то должно выполняться $(a-2)(b-3) \leq 0$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{4x+5}-3) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} \geq 2 \\ \sqrt{4x+5} \leq 3 \\ \sqrt{x+3} \leq 2 \\ \sqrt{4x+5} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 4 \\ 4x+5 \leq 9 \\ 4x+5 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+3 \leq 4 \\ 4x+5 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \\ x \leq 1 \\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{1\}$.

Решение карточки 6

$$1. \sqrt{x+4} + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+20}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x+4+4\sqrt{(x+4)(x+1)}+4(x+1)=x+20;$$

$$4\sqrt{x^2+5x+4}=-4x+12.$$

Сократим на 4:

$$\sqrt{x^2+5x+4}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2+5x+4=9-6x+x^2 \end{cases}.$$

Решив систему, получим $\begin{cases} x \leq 3 \\ x = \frac{5}{11} \end{cases}.$

Ответ: $x = \frac{5}{11}.$

$$2. \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2+18} = 5.$$

Выполним подстановку: $\sqrt[3]{x^2-1} = t.$

$$\text{Тогда } x^2 = t^3 + 1; \quad x^2 + 18 = t^3 + 19.$$

Исходное уравнение примет вид $\sqrt[3]{t^3+19} = 5-t.$

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$t^3 + 19 = 5^3 - 3 \cdot 5^2 \cdot t + 3 \cdot 5 \cdot t^2 - t^3;$$

$$2t^3 - 15t^2 + 75t - 106 = 0.$$

Пусть $f(t) = 2t^3 - 15t^2 + 75t - 106.$

$f(2) = 0$, т. е. $f(t)$ кратно $(t-2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - 15t^2 + 75t - 106 & t - 2 \\ \hline 2t^3 - 4t^2 & \\ \hline -11t^2 + 75t & \\ -75t^2 + 22t & \\ \hline 53t - 106 & \\ -53t + 106 & \\ \hline & \end{array}$$

Можно убедиться, что $t = 2$ — единственный корень полученного уравнения, так как $2t^2 - 11t + 53 = 0$ корней не имеет ($D < 0$).

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2; \quad x^2 = 9; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-3; 3\}$.

3. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1.$

Перенесем $\sqrt{x}$ в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x - \sqrt{1 - x} = 1 - 2\sqrt{x} + x; \quad \sqrt{1 - x} = 2\sqrt{x} - 1.$$

Еще раз возведем обе части уравнения в квадрат:

$$1 - x = 4x - 4\sqrt{x} + 1; \quad \sqrt{x}(5\sqrt{x} - 4) = 0.$$

Тогда $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{16}{25} \end{cases}.$

Выполнив подстановку, можно убедиться, что число $\frac{16}{25}$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{16}{25}$.

4. $\sqrt{-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{\sqrt{8}}.$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{-x} > \sqrt{x+1} \\ -x - 2\sqrt{-x(x+1)} + x + 1 > \frac{1}{8} \\ -x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > x + 1 \\ 2\sqrt{-x(x+1)} < \frac{2}{3} \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -x^2 - x < \frac{1}{9} \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ 9x^2 + 9x + 1 > 0 \end{cases}.$$

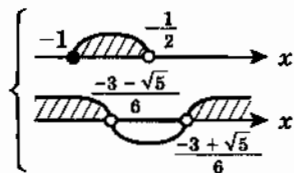
Числа $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{6}$ являются корнями уравнения $9x^2 + 9x + 1 = 0$.

Выясним, что больше: $\frac{-3+\sqrt{5}}{6}$ или $-\frac{1}{2}$?

Найдем разность: $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-3}{6} = -\frac{3-3+\sqrt{5}}{6}$, т. е. $-\frac{\sqrt{5}}{6} < 0$, следовательно $-\frac{1}{2} < \frac{-3+\sqrt{5}}{6}$.

Выясним, что больше: $\frac{-3-\sqrt{5}}{6}$ или -1 ?

Найдем разность: $-1 - \frac{-3-\sqrt{5}}{6} = -\frac{6-3-\sqrt{5}}{6}$; $-\frac{3-\sqrt{5}}{6} < 0$, следовательно $-1 < \frac{-3-\sqrt{5}}{6}$.



Ответ: $\left[-1; \frac{-3+\sqrt{5}}{6}\right)$.

5. $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{1-x} \leq x^2 + 2x - 3$.

Разложим трехчлены $x^2 + 4x + 3$ и $x^2 + 2x - 3$ на множители:

$$(x+3)(x+1)\sqrt{1-x} - (x+3)(x-1) \leq 0.$$

Вынесем за скобку $(x+3)\sqrt{1-x}$:

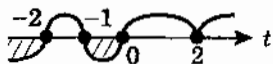
$$(x+3)\sqrt{1-x}(x-1-\sqrt{x+1}) \leq 0.$$

Выполним подстановку: $\sqrt{1-x} = t$ ($t \geq 0$).

Тогда $1-x = t^2$; $x+1 = 2-t^2$; $x+3 = 4-t^2$.

Неравенство примет вид:

$$(4-t^2) \cdot t(2-t^2+t) \leq 0; (t-2)(t+2)t(t-2)(t+1) \leq 0.$$



Возвращаясь к переменной x и учитывая, что $t \geq 0$, получаем:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} = 0 \\ \sqrt{1-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-3; 1\}$.

5

Зачетные карточки

Карточка 1

1. $\sqrt{x} + \sqrt{x(x+2)} - \sqrt{(x+1)^3} = 0.$

2. $x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3}) = 30.$

3. $\sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} + \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} = 2.$

4. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq x + 4.$

5. $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2} \geq 1.$

Карточка 2

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4.$

2. $\sqrt[5]{(x+2)(x+32)} - \sqrt[5]{(x+1)(x+33)} = 1.$

3. $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}.$

4. $\sqrt{x^2-4x} > x-3.$

5. $\sqrt{11+2x} + \sqrt{21-2x} \geq 8.$

Карточка 3

$$1. \sqrt{2x+6} + \sqrt{x-4} = 5.$$

$$2. \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5.$$

$$3. \sqrt{19+x} + \sqrt[4]{2x^2+45x+133} = 6\sqrt{7+2x}.$$

$$4. \sqrt{2x+3} < 1 - \sqrt{x+2}.$$

$$5. (\sqrt{3-x} - x - 3)(\sqrt{5-4x} - x - 4) \leq 0.$$

Карточка 4

$$1. \sqrt{x+3} + 2\sqrt{x-3} = 9.$$

$$2. \sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4.$$

$$3. \sqrt[3]{x-1} = 1 - \sqrt{2-x}.$$

$$4. \sqrt{2+x} > \sqrt{7+x} - \sqrt{2x-3}.$$

$$5. 2\sqrt{x^3+4x} > x^2 - 8x + 4.$$

Карточка 5

$$1. \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{34+x} - \sqrt{7+x}.$$

$$2. \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{x^2-x}.$$

$$3. \sqrt[3]{-x-1} = 1 - \sqrt{x+2}.$$

$$4. \sqrt{x+2} < \sqrt{x+12} - \sqrt{2x-10}.$$

$$5. \frac{\sqrt{2x+3}-1-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{7-2x}} < 0.$$

Карточка 6

$$1. \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}.$$

$$2. \sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

$$3. \sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1.$$

$$4. \sqrt{3 - 2x} \leq 1 - \sqrt{2 - x}.$$

$$5. \sqrt{x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 3x - 4}} > x + \frac{1}{2}.$$

Карточка 7

$$1. \sqrt{\sqrt{6x^2 + 1} - 2x} = 1 - x.$$

$$2. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - 16} = \sqrt[3]{x - 8}.$$

$$3. \sqrt{x - 3} + \sqrt{2x - 7} + \sqrt{x + 1 + 3\sqrt{2x - 7}} = 7\sqrt{2}.$$

$$4. \sqrt{2x - 3} + \sqrt{3x - 5} < \sqrt{4x - 7} + \sqrt{5x - 9}.$$

$$5. \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 5x} > 4.$$

Карточка 8

$$1. \sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}.$$

$$2. \sqrt[5]{33 - x} + \sqrt[5]{x} = 3.$$

$$3. \sqrt{4x^2 - \sqrt{x - 2}} = 3\sqrt{x} - 2x.$$

$$4. \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 7x} > 3.$$

$$5. \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} > 1.$$

Решение зачетной карточки 1

$$1. \sqrt{x} + \sqrt{x(x+2)} - \sqrt{(x+1)^3} = 0.$$

Перенесем $\sqrt{(x+1)^3}$ в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$D(Y): \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in [0; \infty).$$

$$x + 2\sqrt{x^2(x+2)} + x^2 + 2x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x+2)} = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Выполним подстановку: $\sqrt{x^2(x+2)} = t \geq 0$.

Тогда $x^2(x+2) = t^2$.

Уравнение примет вид $2t = t^2 + 1$; $(t-1)^2 = 0$.

$\sqrt{x^2(x+2)} = 1$ или после возведения в квадрат:

$$x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

Заметим, что $(x^3 + 2x^2 - 1)$ кратно $(x+1)$, тогда $(x+1)(x^2 + x - 1) = 0$.

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь числа -1 , $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Но $x = -1 \notin [0; \infty)$, $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin [0; \infty)$,

т. е. $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ — решение данного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$2. x\sqrt[3]{35-x^3} (x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30.$$

Выполним подстановки $\sqrt[3]{35-x^3} = a$ и $x = b$.

Тогда $35 - x^3 = a^3$; $x^3 = b^3$; $a^3 + b^3 = 35$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ (a+b)((a+b)^2 - 3ab) = 35 \end{cases}$$

В последнем уравнении системы раскроем скобки:

$$\begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 35 \end{cases}$$

Так как $ab(a+b) = 30$, то

$$\begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ (a+b)^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ a+b = 5 \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение $a+b=5$:

$$\begin{cases} 5ab = 30 \\ a+b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ a+b = 5 \end{cases}$$

Воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[3]{35-x^3} = 3 \\ x = 2 \\ \sqrt[3]{35-x^3} = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\{2; 3\}$.

$$3. \sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} + \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} = 2.$$

Выполним подстановку $\sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} = t \geq 0$.

Тогда $\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = t^2$.

Исходное уравнение примет вид

$$t + \frac{1}{t^2} = 2; \quad t^3 - 2t^2 + 1 = 0.$$

Разложив на множители выражение $t^3 - 2t^2 + 1$, получим

$$(t-1)(t^2 - t - 1) = 0.$$

Следовательно, числа 1 , $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ могут быть решениями данного уравнения.

Но $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin [0; \infty)$; $1 > 0$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, т. е. только

1 и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — корни полученного уравнения.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} = 1 \\ \sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3+5\sqrt{5}}{6} \end{cases}.$$

Последовательность решения последнего уравнения такова:

$$\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \quad \frac{2+x}{3-x} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2};$$

$$2+x = (3-x) \frac{7+3\sqrt{5}}{2}; \quad x + x \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 3 \frac{7+3\sqrt{5}}{2} - 2;$$

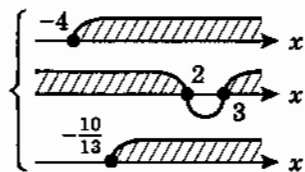
$$x = \frac{(17+9\sqrt{5})(9-3\sqrt{5})}{(9+3\sqrt{5})(9-3\sqrt{5})} = \frac{18+30\sqrt{5}}{36} = \frac{3+5\sqrt{5}}{6}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{3+5\sqrt{5}}{6} \right\}.$

4. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq x + 4.$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leq x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ (x-3)(x-2) \geq 0 \\ x \geq -\frac{10}{13} \end{cases}.$$



Ответ: $\left[-\frac{10}{13}; 2\right] \cup [3; \infty).$

5. $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2} \geq 1.$

Если $x < 2$, то решения нет, так как тогда левая часть отрицательна и больше правой — положительной.

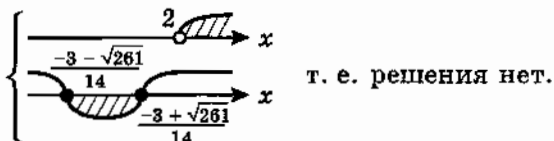
Следовательно, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 2 \\ \sqrt{13 - 7x - 6x^2} \geq x - 2 \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части последнего неравенства:

$$\begin{cases} x > 2 \\ 13 - 7x - 6x^2 \geq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 7x^2 + 3x - 9 \leq 0 \end{cases}$$

Числа $\frac{-3+\sqrt{261}}{14}$ и $\frac{-3-\sqrt{261}}{14}$ — корни уравнения $7x^2 + 3x - 9 = 0$.



Ответ: решения нет.

Решение зачетной карточки 2

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4.$

Перенесем $\sqrt{x+3}$ в правую часть уравнения:

$$\sqrt{2x-1} = 4 - \sqrt{x+3}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$2x - 1 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x + 3; \quad 8\sqrt{x+3} = 20 - x.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$$64(x+3) = 400 - 40x + x^2; \quad x^2 - 104x + 208 = 0.$$

Числа $52 + \sqrt{2496}$ и $52 - \sqrt{2496}$ могут быть решениями исходного уравнения.

Сделать проверку подстановкой этих чисел в исходное уравнение технически сложно, поэтому проверим равносильность переходов:

а) $4 - \sqrt{x+3} \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 13.$

б) $20 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 20.$

в) $D(Y): \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}.$

Следовательно, $x \in \left[\frac{1}{2}; 13\right]$ — условие разрешимости уравнения. Лишь $x = 52 - \sqrt{2496}$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 52 - \sqrt{2496}.$

2. $\sqrt[5]{(x+2)(x+32)} - \sqrt[5]{(x+1)(x+33)} = 1.$

Выполним подстановку: $\sqrt[5]{(x+2)(x+32)} = a$

и $\sqrt[5]{(x+1)(x+33)} = b.$

Тогда $x^2 + 34x + 64 = a^5;$

$x^2 + 34x + 33 = b^5; \quad a^5 - b^5 = 31.$

Напомним, что

$$(m+n)^5 = m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5.$$

Получаем систему: $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^5 - b^5 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ (b + 1)^5 - b^5 = 31 \end{cases}$

Раскрывая скобки в последнем уравнении, получаем

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ b^4 + 2b^3 + 2b^2 + b - 6 = 0 \end{cases}$$

Пусть $f(b) = b^4 + 2b^3 + 2b^2 + b - 6$.

$f(1) = 0$, т. е. $f(b)$ кратно $(b - 1)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r} b^4 + 2b^3 + 2b^2 + b - 6 \quad | \quad b - 1 \\ \underline{b^4 - b^3} \\ 3b^3 + 2b^2 \\ \underline{3b^3 - 3b^2} \\ 5b^2 + b \\ \underline{5b^2 - 5b} \\ 6b - 6 \\ \underline{6b - 6} \\ 0 \end{array}$$

Пусть $\varphi(b) = b^3 + 3b^2 + 5b + 6$.

$\varphi(-2) = 0$, т. е. $\varphi(b)$ кратно $(b + 2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r} b^3 + 3b^2 + 5b + 6 \quad | \quad b + 2 \\ \underline{b^3 + 2b^2} \\ b^2 + 5b \\ \underline{b^2 + 2b} \\ 3b + 6 \\ \underline{3b + 6} \\ 0 \end{array}$$

Получаем, что лишь числа 1 и -2 — корни уравнения $b^4 + 2b^3 + 2b^2 + b - 6 = 0$. Других корней нет, так как $b^2 + b + 3 > 0$ ($D < 0$, $a = 1 > 0$).

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[5]{(x + 1)(x + 33)} = 1 \\ \sqrt[5]{(x + 1)(x + 33)} = -2 \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в пятую степень:

$$\begin{cases} (x + 1)(x + 33) = 1 \\ (x + 1)(x + 33) = -32 \end{cases}$$

Решая уравнения $\begin{cases} x^2 + 34x + 32 = 0 \\ x^2 + 34x + 65 = 0 \end{cases}$, находим их корни:

$$x_{1,2} = -17 \pm \sqrt{257}; \quad x_{3,4} = -17 \pm \sqrt{224}.$$

Ответ: $\{-17 \pm \sqrt{257}; -17 \pm \sqrt{224}\}$.

$$3. \sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}.$$

Выполним подстановку: $\sqrt{x^2 + x + 1} = t \geq 0$.

Тогда $x^2 + x + 1 = t^2$; $x^2 + x + 4 = t^2 + 3$;

$$2x^2 + 2x + 9 = 2t^2 + 7.$$

Исходное уравнение примет вид: $\sqrt{t^2 + 3} + t = \sqrt{2t^2 + 7}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$t^2 + 3 + 2t\sqrt{t^2 + 3} + t^2 = 2t^2 + 7; \quad t\sqrt{t^2 + 3} = 2.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$$t^2(t^2 + 3) = 4; \quad t^4 + 3t^2 - 4 = 0.$$

Числа 1 и -4 — корни уравнения $t^4 + 3t^2 - 4 = 0$ относительно t^2 ; заметим, что $t^2 = -4 < 0$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 < 0 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 1; \quad x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-1; 0\}$.

$$4. \sqrt{x^2 - 4x} > x - 3.$$

Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9 \\ x - 3 < 0 \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 4,5 \\ x < 3 \\ x(x - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4,5 \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (4,5; \infty)$.

$$5. \sqrt{11+2x} + \sqrt{21-2x} \geq 8.$$

Перенесем $\sqrt{21-2x}$ в правую часть неравенства:

$$\sqrt{11+2x} \geq 8 - \sqrt{21-2x}.$$

Последнее равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{cases} 8 - \sqrt{21-2x} \geq 0 \\ 11+2x \geq 64 - 16\sqrt{21-2x} + 21-2x; \\ 8 - \sqrt{21-2x} < 0 \\ 11+2x \geq 0 \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} 21-2x \geq 0 \\ 21-2x \leq 8^2 \\ \begin{cases} 64(21-2x) \geq (37-2x)^2 \\ 37-2x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 21-2x \geq 0 \\ 37-2x < 0 \end{cases} \quad \emptyset \\ 21-2x > 8^2 \\ x \geq -5,5 \end{cases} \right. ;$$

$$\left[\begin{cases} 21-2x \leq 64 \\ 21-2x \geq 0 \\ x \leq 18,5 \\ 64(21-2x) \geq 37^2 - 148x + 4x^2; \\ 21-2x > 64 \\ x \geq -5,5 \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x \geq -21,5 \\ x \leq 10,5 \\ 4x^2 - 20x + 25 \leq 0 \\ x \leq 18,5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq -21,5 \\ x \leq 10,5 \\ (2x-5)^2 \leq 0 \end{cases} \right. \quad \emptyset$$

Ответ: $\{2,5\}$.

Решение зачетной карточки 3

1. $\sqrt{2x+6} + \sqrt{x-4} = 5.$

Перенесем $\sqrt{x-4}$ в правую часть уравнения и возведем в квадрат:

$$\sqrt{2x+6} = 5 - \sqrt{x-4};$$

$$2x+6 = 25 - 10\sqrt{x-4} + x-4;$$

$$10\sqrt{x-4} = 15 - x.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$$100(x-4) = 225 - 30x + x^2;$$

$$x^2 - 130x + 625 = 0.$$

Следовательно, корнями исходного уравнения могут быть числа 5 и 125. Сделав проверку, можно убедиться, что число 5 является корнем исходного уравнения, а число 125 — не является.

Ответ: $x = 5.$

2. $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5.$

Выполним подстановку: $\sqrt[3]{x+7} = t \Rightarrow x+7 = t^3.$

Тогда $28-x = 35-t^3.$

Исходное уравнение примет вид: $t + \sqrt[3]{35-t^3} = 5;$

$$\sqrt[3]{35-t^3} = 5-t.$$

Возведем в третью степень обе части уравнения:

$$35-t^3 = 125 - 3 \cdot 25 \cdot t + 3 \cdot 5 \cdot t^2 - t^3;$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+7} = 2 \\ \sqrt[3]{x+7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 20 \end{cases}.$$

Ответ: $\{1; 20\}.$

$$3. \sqrt{19+x} + \sqrt[4]{2x^2+45x+133} = 6\sqrt{7+2x}.$$

Выполним подстановки:

$$\sqrt[4]{19+x} = a \geq 0$$

$$\text{и } \sqrt[4]{7+2x} = b \geq 0.$$

$$\text{Тогда } \sqrt{19+x} = a^2;$$

$$\sqrt{7+2x} = b^2;$$

$$\sqrt[4]{7+2x} \cdot \sqrt[4]{19+x} = \sqrt[4]{2x^2+45x+133} = ab.$$

Исходное уравнение примет вид: $a^2 + ab - 6b^2 = 0$;

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 24b^2}}{2} = \frac{-b \pm 5b}{2}; \quad a = 2b.$$

$a = -3b$ не является корнем уравнения,

так как $a \geq 0$; $b \geq 0$ и $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt[4]{19+x} = 2\sqrt[4]{7+2x}.$$

Возведем обе части уравнения в четвертую степень:

$$19+x = 16(7+2x).$$

Решая полученное уравнение, находим корень — $x = -3 \in D(Y)$.

Ответ: $x = -3$.

$$4. \sqrt{2x+3} < 1 - \sqrt{x+2}.$$

Данное неравенство равносильно совокупности систем

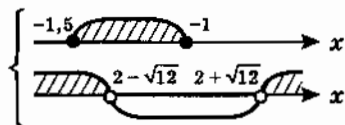
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \sqrt{x+2} \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ 2x+3 < 1 - 2\sqrt{x+2} + x+2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+2} \leq 1 \\ x \geq -1,5 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \sqrt{x+2} \geq 0 \\ \sqrt{2x+3} < 0 \end{array} \right. \quad \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq -1 \\ x \geq -1,5 \\ -x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1,5 \leq x \leq -1 \\ x^2 - 4x - 8 > 0 \end{array} \right.$$

$$4(x+2) < x^2$$

Числа $2 \pm \sqrt{12}$ являются корнями уравнения $x^2 - 4x - 8 = 0$.



Примечание. Так как $\sqrt{12} < 3,5$, то $2 - \sqrt{12} > -1,5$.

Ответ: $[-1,5; 2 - 2\sqrt{3})$.

5. $(\sqrt{3-x} - x - 3)(\sqrt{5-4x} - x - 4) \leq 0$.

Выполним подстановки $\sqrt{3-x} = t \geq 0$
и $\sqrt{5-4x} = z \geq 0$.

Тогда $3-x = t^2$; $-3-x = t^2 - 6$; $5-4x = z^2$;
 $x = \frac{5-z^2}{4}$; $-x-4 = \frac{z^2-21}{4}$.

Исходное неравенство примет вид

$$(t + t^2 - 6)\left(z + \frac{z^2-21}{4}\right) \leq 0.$$

Разложив выражения в скобках на множители, получаем $(t+3)(t-2)(z+7)(z-3) \leq 0$.

Тогда $(t-2)(z-3) \leq 0$, так как $t+3 > 0$ и $z+7 > 0$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$(\sqrt{3-x} - 2)(\sqrt{5-4x} - 3) \leq 0,$$

что равносильно совокупности систем

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3-x} \geq 2 \\ \sqrt{5-4x} \leq 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3-x \geq 4 \\ 5-4x \leq 9 \\ 5-4x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq -1 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1,25 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3-x} \leq 2 \\ \sqrt{5-4x} \geq 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3-x \geq 0 \\ 3-x \leq 4 \\ 5-4x \geq 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ x \leq -1 \end{array} \right.$$

Ответ: $\{-1\}$.

Решение зачетной карточки 4

$$1. \sqrt{x+3} + 2\sqrt{x-3} = 9.$$

Перепишем уравнение в виде $2\sqrt{x-3} = 9 - \sqrt{x+3}$, что равносильно системе

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 9 - \sqrt{x+3} \geq 0 \\ 4(x-3) = 81 - 18\sqrt{x+3} + x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \sqrt{x+3} \leq 9 \\ 6\sqrt{x+3} = 32 - x \end{cases}$$

Воспользовавшись свойствами неравенств, получим

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x+3 \leq 81 \\ 32-x \geq 0 \\ 36(x+3) = 1024 - 64x + x^2 \end{cases}$$

Числа $50 \pm \sqrt{1584}$ являются корнями уравнения $x^2 - 100x + 916 = 0$, тогда

$$\begin{cases} 3 \leq x \leq 32 \\ \begin{cases} x = 50 + \sqrt{1584} \\ x = 50 - \sqrt{1584} \end{cases} \end{cases}$$

Очевидно, что $50 + \sqrt{1584} \notin [3; 32]$;

$50 - \sqrt{1584} \in [3; 32]$, так как $\sqrt{1584} \approx 39$.

Ответ: $x = 50 - 12\sqrt{11}$.

$$2. \sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4.$$

Выполним подстановку: $\sqrt{x+7} = t \geq 0$.

Тогда $x+7 = t^2$; $x+8 = t^2+1$; $x+1 = t^2-6$.

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2+1} + 2t + \sqrt{t^2-t-6} = 4; \quad |t+1| + \sqrt{t^2-t-6} = 4.$$

Так как $t \geq 0$, то получаем

$$t+1 + \sqrt{t^2-t-6} = 4; \quad \sqrt{t^2-t-6} = 3-t,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t^2 - t - 6 = 9 - 6t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{x+7} = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

$$3. \sqrt[3]{x-1} = 1 - \sqrt{2-x}.$$

Выполним подстановку: $\sqrt{2-x} = t \geq 0$.

Тогда $2-x = t^2$; $-x = t^2 - 2$; $x-1 = 1-t^2$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt[3]{1-t^2} = 1-t$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$1-t^2 = 1-3t+3t^2-t^3; \quad t^3-4t^2+3t=0;$$

$$t(t-1)(t-3)=0.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} = 0 \\ \sqrt{2-x} = 1 \\ \sqrt{2-x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = -7 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-7; 1; 2\}$.

$$4. \sqrt{2+x} > \sqrt{7+x} - \sqrt{2x-3}.$$

Перепишем исходное неравенство в виде

$$\sqrt{2x-3} > \sqrt{7+x} - \sqrt{2+x}.$$

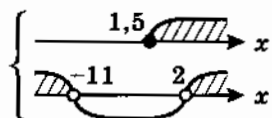
Последнее неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \sqrt{7+x} \geq \sqrt{2+x} \\ x \geq 1,5 \\ 2x-3 > 7+x-2\sqrt{x^2+9x+14}+2+x \Leftrightarrow \\ \sqrt{7+x} < \sqrt{2+x} \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 7 + x \geq 2 + x \\ x \geq 1,5 \\ \sqrt{x^2 + 9x + 14} > 6 \end{cases} \\ \begin{cases} 7 + x < 2 + x \\ x \geq 1,5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 7 \geq 2 \\ x \geq 1,5 \\ x^2 + 9x - 22 > 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 7 < 2 \\ x \geq 1,5 \end{cases} \end{cases} \quad \emptyset$$

Последняя система неравенств решений не имеет.

Значения $x = -11$ и $x = 2$ являются корнями уравнения $x^2 + 9x - 22 = 0$.



Ответ: $(2; \infty)$.

$$5. 2\sqrt{x^3 + 4x} > x^2 - 8x + 4.$$

Напомним, что

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 4 \geq 0 \\ 4(x^3 + 4x) > x^4 + 64x^2 + 16 - 16x^3 + 8x^2 - 64x \\ x^2 - 8x + 4 < 0 \\ x^3 + 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 4 \geq 0 \\ x^4 - 20x^3 + 72x^2 - 80x + 16 < 0 \\ x^2 - 8x + 4 < 0 \\ x(x^2 + 4) \geq 0 \end{cases}.$$

Пусть $f(x) = x^4 - 20x^3 + 72x^2 - 80x + 16$.

$f(2) = 0$, т. е. $f(x)$ кратно $(x - 2)$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r}
 -x^4 - 20x^3 + 72x^2 - 80x + 16 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{x^4 - 2x^3} \\
 -18x^3 + 72x^2 \\
 \underline{-18x^3 + 36x^2} \\
 -36x^2 - 80x + 16 \\
 \underline{-36x^2 - 72x} \\
 -8x + 16 \\
 \underline{-8x + 16} \\
 0
 \end{array}$$

Пусть $\varphi(x) = x^3 - 18x^2 + 36x - 8$.

$\varphi(2) = 0$, т. е. $\varphi(x)$ кратно $(x - 2)$. Выполним деление:

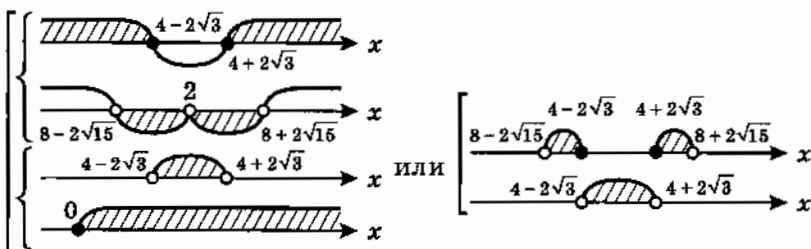
$$\begin{array}{r}
 -x^3 - 18x^2 + 36x - 8 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 -16x^2 + 36x - 8 \\
 \underline{-16x^2 + 32x} \\
 -4x - 8 \\
 \underline{-4x - 8} \\
 0
 \end{array}$$

Числа $8 \pm 2\sqrt{15}$ являются корнями уравнения

$$x^2 - 16x + 4 = 0,$$

числа $4 \pm 2\sqrt{3}$ — корнями уравнения $x^2 - 8x + 4 = 0$.

Тогда получаем систему
$$\begin{cases} x^2 - 8x + 4 \geq 0 \\ (x - 2)^2 (x^2 - 16x + 4) < 0 \\ x^2 - 8x + 4 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $(8 - 2\sqrt{15}; 8 + 2\sqrt{15})$.

Решение зачетной карточки 5

$$1. \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{34+x} - \sqrt{7+x}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\begin{aligned} x-1 + 2\sqrt{x^2+x-2} + x+2 &= \\ &= 34+x - 2\sqrt{x^2+41x+238} + 7+x; \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2+x-2} = 20 - \sqrt{x^2+41x+238}.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\begin{aligned} x^2+x-2 &= 400 - 40\sqrt{x^2+41x+238} + x^2+41x+238; \\ \sqrt{x^2+41x+238} &= 16+x. \end{aligned}$$

Возведем в квадрат обе части уравнения в третий раз:

$$x^2+41x+238 = 256 + 32x + x^2.$$

Решением данного уравнения является число 2.

Сделав проверку, можно убедиться, что 2 является также корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

$$2. \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{x^2-x}.$$

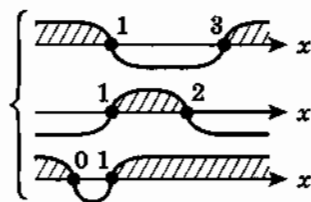
Разложим на множители подкоренные выражения:

$$\sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{-(x-1)(x-2)} = \sqrt{x(x-1)}.$$

Сделав проверку, убеждаемся, что число 1 — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

$$D(Y): \begin{cases} (x-1)(x-3) \geq 0 \\ -(x-1)(x-2) \geq 0 \\ x(x-1) \geq 0 \end{cases}$$



или $x = 1$.

$$3. \sqrt[3]{-x-1} = 1 - \sqrt{x+2}.$$

Выполним подстановку $\sqrt{x+2} = a \geq 0$.

Тогда $x = a^2 - 2$; $-x = 2 - a^2$; $-1 - x = 1 - a^2$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt[3]{1-a^2} = 1-a$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$1 - a^2 = 1 - 3a + 3a^2 - a^3; \quad a^3 - 4a^2 + 3a = 0;$$

$$a(a^2 - 4a + 3) = 0; \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 3 \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} = 0 \\ \sqrt{x+2} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Ответ: $\{-2; -1; 7\}$.

$$4. \sqrt{x+2} < \sqrt{x+12} - \sqrt{2x-10}.$$

Данное неравенство равносильно совокупности систем

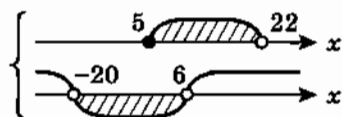
$$\begin{cases} \sqrt{x+12} > \sqrt{2x-10} \\ 2x-10 \geq 0 \\ x+2 < x+12 - 2\sqrt{2(x+12)(x-5)} + 2x-10 \\ \sqrt{x+12} < \sqrt{2x-10} \\ \sqrt{x+2} < 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Очевидно, последняя система решений не имеет, а первая система равносильна

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x+12 > 2x-10 \\ \sqrt{2(x^2+7x-60)} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x < 22 \\ 2x^2+14x-120 < x^2 \end{cases}$$

Числа -20 и 6 являются решениями уравнения

$$x^2 + 14x - 120 = 0.$$



Ответ: $[5; 6)$.

$$5. \frac{\sqrt{2x+3}-1-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{7-2x}} < 0.$$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 7 - 2x > 0 \\ \sqrt{2x + 3} < 1 + \sqrt{2x - 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3,5 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 2x + 3 < 1 + 2\sqrt{2x - 1} + 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 \leq x < 3,5 \\ 2\sqrt{2x - 1} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 \leq x < 3,5 \\ 4(2x - 1) > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 \leq x < 3,5 \\ x > \frac{13}{8} \end{cases}.$$

Ответ: $(1\frac{5}{8}; 3\frac{1}{2})$.

Решение зачетной карточки 6

$$1. \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = x - \sqrt{x+8};$$

$$\sqrt{x+8} = 2\sqrt{x+1} - 2.$$

Возведем еще раз в квадрат обе части уравнения:

$$x+8 = 4x+4 - 8\sqrt{x+1} + 4; \quad 8\sqrt{x+1} = 3x.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат в третий раз:

$$64(x+1) = 9x^2.$$

Решая квадратное уравнение $9x^2 - 64x - 64 = 0$, убеждаемся, что числа 8 и $-\frac{8}{9}$ могут быть решениями данного уравнения. Выполнив проверку, убеждаемся, что число 8 — корень уравнения.

Ответ: $x = 8$.

$$2. \sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Представив подкоренные выражения в виде множителей, запишем исходное уравнение так:

$$\sqrt{(x+2)(x-1)} + \sqrt{(x+3)(x-1)} = \sqrt{(x-1)(x-2)}.$$

Напомним, что

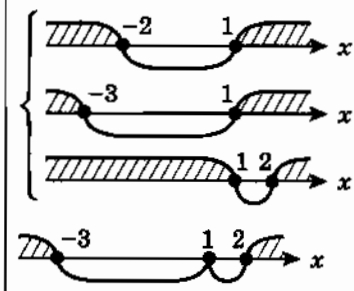
$$\sqrt{a \cdot b} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} & \text{при } a \geq 0, b \geq 0 \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} & \text{при } a \leq 0, b \leq 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что $x = 1$ является корнем заданного уравнения.

Проверим, есть ли корни на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[2; \infty)$.

$$D(Y): \begin{cases} (x+2)(x-1) \geq 0 \\ (x+3)(x-1) \geq 0 \\ (x-2)(x-1) \geq 0 \end{cases}$$



1) Если $x \geq 2$, то $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2\sqrt{x^2 + 5x + 6} = -x - 7;$$

$-x - 7 < 0$ на промежутке $[2; \infty)$, следовательно, корней нет.

2) Если $x \leq -3$, то $\sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-3} = \sqrt{2-x}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$-x - 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 6} - x - 3 = 2 - x;$$

$$2\sqrt{x^2 + 5x + 6} = 7 + x;$$

$$\begin{cases} x + 7 \geq 0 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2 + 5x + 6) = 49 + 14x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq -3 \\ 3x^2 + 6x - 25 = 0 \end{cases}$$

Числа $\frac{-3 \pm \sqrt{84}}{3}$ являются корнями уравнения

$$3x^2 + 6x - 25 = 0, \text{ но только } x = -\frac{3 + \sqrt{84}}{3} \in [-7; -3].$$

Рассмотрим иной способ решения заданного уравнения.

$$\sqrt{(x+2)(x-1)} + \sqrt{(x+3)(x-1)} = \sqrt{(x-1)(x-2)}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\begin{aligned} (x+2)(x-1) + 2\sqrt{(x-1)^2(x+2)(x+3)} + (x+3)(x-1) &= \\ &= (x-1)(x-2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+2)(x-1) + 2|x-1|\sqrt{(x+2)(x+3)} + (x+3)(x-1) &= \\ &= (x-1)(x-2). \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда, если

1) $x \geq 1$, то $|x-1| = x-1$;

уравнение (1) равносильно на $[1; \infty)$ совокупности:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 2 + 2\sqrt{(x+2)(x+3)} + x + 3 = x - 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 5x + 6} = -x - 7 < 0 \end{cases} \text{ на } [1; \infty). \text{ Только } x = 1.$$

2) $x < 1$, то $|x - 1| = 1 - x$;

тогда (1) равносильно на $(-\infty; 1)$ совокупности:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2\sqrt{x^2 + 5x + 6} = x + 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \notin (-\infty; 1) \\ \begin{cases} 4(x^2 + 5x + 6) = x^2 + 14x + 49 \\ x < 1 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x - 25 = 0 \\ -7 \leq x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3+\sqrt{84}}{3}.$$

Окончательный ответ является объединением ответов двух рассмотренных случаев.

Ответ: $\left\{-\frac{3+\sqrt{84}}{3}; 1\right\}$.

3. $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1$.

Выполним подстановку: $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = a$ и $\sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = b$.

Тогда $\frac{1}{2} + x = a^5$; $\frac{1}{2} - x = b^5$; $a^5 + b^5 = 1$.

Составим систему: $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^5 + b^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ (1 - b)^5 + b^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$(1 - b)^5 = 1 - 5b + 10b^2 - 10b^3 + 5b^4 - b^5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 5(b^4 - 2b^3 + 2b^2 - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ b(b^3 - 2b^2 + 2b - 1) = 0 \end{cases}.$$

Пусть $f(b) = b^3 - 2b^2 + 2b - 1$.

$f(1) = 0$, т. е. $f(b)$ кратно $b - 1$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r} b^3 - 2b^2 + 2b - 1 \overline{) b - 1} \\ \underline{b^3 - b^2} \\ -b^2 + 2b \\ \underline{-b^2 + b} \\ -b - 1 \\ \underline{-b - 1} \\ 0 \end{array}$$

Уравнение $b^2 - b + 1 = 0$ корней не имеет ($D < 0$), следовательно,

$$\begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[5]{\frac{1}{2}} + x = 0 \\ \sqrt[5]{\frac{1}{2}} + x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Используя полученные значения b , получим те же решения.

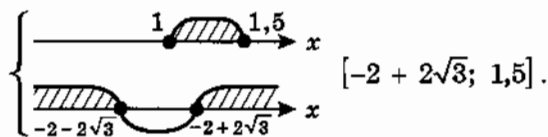
Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

4. $\sqrt{3 - 2x} \leq 1 - \sqrt{2 - x}$.

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ 3 - 2x \leq 1 - 2\sqrt{2 - x} + 2 - x \\ 1 - \sqrt{2 - x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5 \\ x \leq 2 \\ 2 - x \leq 1 \\ 2\sqrt{2 - x} \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5 \\ x \geq 1 \\ x^2 + 4x - 8 \geq 0 \end{cases}.$$



Ответ: $[-2 + 2\sqrt{3}; 1,5]$.

5. $\sqrt{x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 3x - 4}} > x + \frac{1}{2}$.

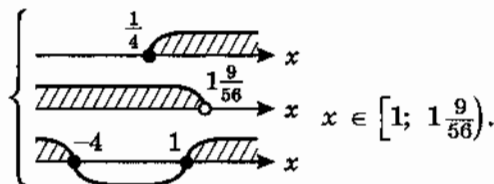
Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} \geq 0 \\ x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 3x - 4} > x^2 + x + \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{2} < 0 \\ x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 3x - 4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

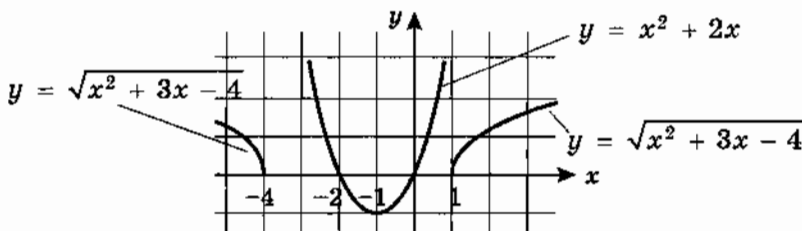
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \sqrt{x^2 + 3x - 4} < x - \frac{1}{4} \\ x < -\frac{1}{2} \\ x^2 + 2x \geq \sqrt{x^2 + 3x - 4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4} \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 < x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \\ x < -\frac{1}{2} \\ x^2 + 2x \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ (x^2 + 2x)^2 \geq x^2 + 3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ 3,5x < 4\frac{1}{16} \\ (x+4)(x-1) \geq 0 \\ x < -\frac{1}{2} \\ x(x+2) \geq 0 \\ (x+4)(x-1) \geq 0 \\ x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 3x + 4 \geq 0 \end{cases}$$



Вторую систему решим, построив графики функций $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ и $y = x^2 + 2x$ (так как решить иначе технически сложно).



Очевидно, что $x^2 + 2x > \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ всегда при $x \in (-\infty; -4] \cup [1; \infty)$.

Учитывая, что в этом случае $x < -\frac{1}{2}$, получаем $x \leq -4$.

Ответ: $(-\infty; -4] \cup \left[1; 1\frac{9}{56}\right)$.

Решение зачетной карточки 7

$$1. \sqrt{\sqrt{6x^2 + 1} - 2x} = 1 - x.$$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ \sqrt{\sqrt{6x^2 + 1} - 2x} = 1 - 2x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1 \end{cases}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 6x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}.$$

Ответ: $\{0; -2\}$.

$$2. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - 16} = \sqrt[3]{x - 8}.$$

Напомним, что $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Возведем в третью степень обе части уравнения:

$$x + x - 16 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x - 16} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - 16}) = x - 8.$$

Заменив $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - 16}$ на $\sqrt[3]{x - 8}$ (согласно исходному уравнению), получим

$$3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x - 16} \cdot \sqrt[3]{x - 8} = -(x - 8).$$

Еще раз возведем в третью степень обе части уравнения:

$$27 \cdot x(x - 16)(x - 8) + (x - 8)^3 = 0;$$

$$(x - 8)(27x^2 - 432x + x^2 - 16x + 64) = 0;$$

$$\begin{cases} x - 8 = 0 \\ 28x^2 - 448x + 64 = 0 \end{cases}.$$

Поделив последнее уравнение на 4, получим

$$\begin{cases} x - 8 = 0 \\ 7x^2 - 112x + 16 = 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что решениями исходного уравнения могут быть числа 8 и $\frac{56 \pm 12\sqrt{21}}{7}$. Проверка способом подстановки показывает, что 8 — корень заданного уравнения, но как проверить $\frac{56 \pm 12\sqrt{21}}{7}$? Ведь эти числа получены не при тождественной подстановке, а при замене $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16}$ на $\sqrt[3]{x-8}$.

Попробуем решить уравнение по-другому. Поделим почленно части исходного уравнения на $\sqrt[3]{x}$, тогда

$$1 + \sqrt[3]{1 - \frac{16}{x}} = \sqrt[3]{1 - \frac{8}{x}}.$$

Выполним подстановки: $\sqrt[3]{1 - \frac{16}{x}} = a$ и $\sqrt[3]{1 - \frac{8}{x}} = b$.

Тогда $1 - \frac{16}{x} = a^3$; $1 - \frac{8}{x} = b^3$; $2b^3 - a^3 = 1$.

Составим систему

$$\begin{cases} 1 + a = b \\ 2b^3 - a^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a = b \\ 2(1+a)^3 - a^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a = b \\ 2(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - a^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a = b \\ a^3 + 6a^2 + 6a + 1 = 0 \end{cases}.$$

Пусть $f(a) = a^3 + 6a^2 + 6a + 1$.

$f(-1) = 0$, т. е. $f(a)$ кратно $(a+1)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^3 + 6a^2 + 6a + 1 & a + 1 \\ -a^3 + a^2 & \\ \hline 5a^2 + 6a & \\ -5a^2 + 5a & \\ \hline a + 1 & \\ -a + 1 & \\ \hline & \end{array}$$

Следовательно,
$$\begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \\ a = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{56+12\sqrt{21}}{7} \\ x = \frac{56-12\sqrt{21}}{7} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{8; \frac{56+12\sqrt{21}}{7}; \frac{56-12\sqrt{21}}{7}\right\}$.

$$3. \sqrt{x-3} + \sqrt{2x-7} + \sqrt{x+1+3\sqrt{2x-7}} = 7\sqrt{2}.$$

Выполним подстановку: $\sqrt{2x-7} = a \geq 0$.

Тогда $2x-7 = a^2$; $x = \frac{a^2+7}{2}$; $x+1 = \frac{a^2+9}{2} > 0$;

$$x-3 = \frac{a^2+1}{2} > 0.$$

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + a + \sqrt{\frac{a^2+9}{2} + 3a} = 7\sqrt{2};$$

$$\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2}} + \sqrt{\frac{a^2+6a+9}{2}} = 7\sqrt{2}; \quad \frac{|a+1|}{\sqrt{2}} + \frac{|a+3|}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}.$$

Учтем, что $|a+1| = a+1$; $|a+3| = a+3$ ($a \geq 0$).

Тогда получаем $a+1+a+3=14$; $a=5$.

Возвращаясь к переменной x , получаем $\sqrt{2x-7}=5$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$2x-7=25; \quad x=16.$$

Ответ: $x=16$.

$$4. \sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-5} < \sqrt{4x-7} + \sqrt{5x-9}.$$

Решить данное неравенство на уровне равносильности технически очень сложно.

Запишем неравенство в виде

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{4x-7} < \sqrt{5x-9} - \sqrt{3x-5},$$

тогда, анализируя знаки правой и левой частей, имеем:

$$a) \begin{cases} \sqrt{2x-3} < \sqrt{4x-7} \\ \sqrt{5x-9} > \sqrt{3x-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 < 4x-7 \\ 5x-9 > 3x-5 \\ x \geq 1,8 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \sqrt{2x-3} > \sqrt{4x-7} \\ \sqrt{5x-9} < \sqrt{3x-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 > 4x-7 \\ 5x-9 < 3x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1,8 \end{cases}.$$

При $x \in [1,8; 2)$ решения нет, так как левая часть получается больше нуля, а правая — меньше нуля.

Очевидно, что $x = 2$ не является решением.

Примечание. Другие случаи можно не анализировать, так как при $x \in (-\infty; 1,8)$ неравенство не определено.

Ответ: $(2; \infty)$.

$$5. \sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+5x} > 4.$$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ x^2+5x \geq 0 \\ 25-x^2+2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x}+x^2+5x > 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x \leq -5 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} > -9-5x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ 2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} > -9-5x \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} > -9-5x \end{cases}.$$

Сделав проверку, убеждаемся, что при $x = -5$ неравенство ложно.

Решим неравенство $2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} > -9-5x$ на промежутке $[0; 5]$, где $-9-5x < 0$.

Тогда $2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} \geq 0$, т. е. при $x \in [0; 5]$ неравенство верно.

Ответ: $[0; 5]$.

Решение зачетной карточки 8

$$1. \sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}.$$

Выполним подстановки: $\sqrt{1 + \frac{20}{x}} = a \geq 0$ и

$$\sqrt{-1 + \frac{20}{x}} = b \geq 0.$$

Тогда $1 + \frac{20}{x} = a^2$; $-1 + \frac{20}{x} = b^2$; $a^2 - b^2 = 2$.

Составим систему

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{6} \\ a^2 - b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt{6} \\ (a + b)(a - b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt{6} \\ a - b = \frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

откуда $a = \frac{2}{3}\sqrt{6}$, $b = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\sqrt{1 + \frac{20}{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}; \quad x = 12.$$

Ответ: $x = 12$.

$$2. \sqrt[5]{33-x} + \sqrt[5]{x} = 3.$$

Выполним подстановки: $\sqrt[5]{33-x} = a$ и $\sqrt[5]{x} = b$.

Тогда $33 - x = a^5$; $x = b^5$; $a^5 + b^5 = 33$.

Составим систему

$$\begin{cases} b = 3 - a \\ a^5 + 243 - 5 \cdot 81a + 10 \cdot 27a^2 - 10 \cdot 9a^3 + 15a^4 - a^5 = 33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ a^4 - 6a^3 + 18a^2 - 27a + 14 = 0 \end{cases}$$

Пусть $f(a) = a^4 - 6a^3 + 18a^2 - 27a + 14$.

$f(2) = 0$, т. е. $f(a)$ кратно $(a - 2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^4 - 6a^3 + 18a^2 - 27a + 14 & a - 2 \\ \underline{a^4 - 2a^3} & a^3 - 4a^2 + 10a - 7 \\ & -4a^3 + 18a^2 \\ & \underline{-4a^3 + 8a^2} \\ & 10a^2 - 27a \\ & \underline{10a^2 - 20a} \\ & -7a + 14 \\ & \underline{-7a + 14} \\ & 0 \end{array}$$

Пусть $\varphi(a) = a^3 - 4a^2 + 10a - 7$.

$\varphi(1) = 0$, т. е. $\varphi(a)$ кратно $a - 1$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 4a^2 + 10a - 7 & a - 1 \\ \underline{a^3 - a^2} & a^2 - 3a + 7 \\ -3a^2 + 10a & \\ \underline{-3a^2 + 3a} & \\ -7a - 7 & \\ \underline{-7a - 7} & \end{array}$$

Уравнение $a^2 - 3a + 7 = 0$ корней не имеет ($D < 0$),

следовательно, $\begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases}$.

Значение b знать уже не обязательно. Почему?

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{cases} \sqrt[5]{33 - x} = 1 \\ \sqrt[5]{33 - x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 33 - x = 1 \\ 33 - x = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{1; 32\}$.

3. $\sqrt{4x^2 - \sqrt{x} - 2} = 3\sqrt{x} - 2x$.

Выполним подстановку: $\sqrt{x} = t \geq 0$.

Тогда $x = t^2$; $x^2 = t^4$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt{4t^4 - t - 2} = 3t - 2t^2$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$4t^4 - t - 2 = 9t^2 - 12t^3 + 4t^4.$$

Пусть $f(t) = 12t^3 - 9t^2 - t - 2$.

$f(1) = 0$, т. е. $f(t)$ кратно $(t - 1)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} 12t^3 - 9t^2 - t - 2 & t - 1 \\ \underline{12t^3 - 12t^2} & 12t^2 + 3t + 2 \\ -3t^2 - t & \\ \underline{-3t^2 - 3t} & \\ -2t - 2 & \\ \underline{-2t - 2} & \end{array}$$

Следовательно $t = 1$, так как уравнение $12t^2 + 3t + 2 = 0$ корней не имеет ($D < 0$).

Возвращаясь к переменной x , получаем $\sqrt{x} = 1$; $x = 1$.

Сделав проверку, можно убедиться, что число 1 является корнем заданного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

4. $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 7x} > 3$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 25 - x^2 \geq 0 \\ x^2 + 7x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - x^2 + 2\sqrt{(25 - x^2)(x^2 + 7x)} + x^2 + 7x > 9 \\ (5 - x)(5 + x) \geq 0 \\ x(x + 7) \geq 0 \\ 2\sqrt{(25 - x^2)x(x + 7)} > -16 - 7x \end{cases}$$

Решив неравенства $(5 - x)(5 + x) \geq 0$ и $x(x + 7) \geq 0$, получим $0 \leq x \leq 5$.

Очевидно, что при $x \in [0; 5]$ выражение $-16 - 7x < 0$, т. е. $2\sqrt{(25 - x^2)x(x + 7)} > -16 - 7x$ для $\forall x \in [0; 5]$.

Ответ: $[0; 5]$.

5. $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} > 1$.

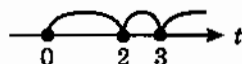
Выполним подстановку: $\sqrt{x - 1} = t \geq 0$.

Тогда $x - 1 = t^2$; $x = t^2 + 1$; $x + 3 = t^2 + 4$; $x + 8 = t^2 + 9$.

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2 + 4 - 4t} + \sqrt{t^2 + 9 - 6t} > 1; \quad |t - 2| + |t - 3| > 1.$$

Разобьем числовую ось числами 0; 2; 3:



1) Если $t \in [0; 2]$, то $2 - t + 3 - t > 1$ или $0 \leq t < 2$.

Возвращаясь к переменной x , получаем $0 \leq \sqrt{x - 1} < 2$; $1 \leq x < 5$.

2) Если $t \in [2; 3]$, то $t - 2 + 3 - t > 1$, т. е. решений нет.

3) Если $t \geq 3$, то $t - 2 + t - 3 \geq 1$; $t > 3$.

Возвращаясь к переменной x , получаем $\sqrt{x - 1} > 3$; $x > 10$.

Ответ: $[1; 5) \cup (10; \infty)$.

Ответы к самостоятельным работам

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. $\{4\}$ 2. $\{-\frac{1}{2}\}$ 3. $\{1\}$ 4. $\{8\}$ 5. $\{6\}$ 6. $\{-3; 3; 7\}$
 7. $\{-5\}$ 8. $\{-2; 0\}$ 9. $\{-10; -2; -1\}$ 10. $\{-1; 6\}$

Вариант 2

1. $\{-4\}$ 2. $\{\frac{1}{2}\}$ 3. $\{-1\}$ 4. $\{-8\}$ 5. $\{-6\}$ 6. $\{-7; -4; 4\}$
 7. $\{5\}$ 8. $\{0; 2\}$ 9. $\{1; 2; 10\}$ 10. $\{-6; 1\}$

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $\{\frac{5}{18}\}$ 2. $\{-3; 4\}$ 3. $\{\frac{18}{31}\}$ 4. $\{1\}$ 5. $[3; 8]$
 6. $\{1\}$ 7. $\{-2\}$ 8. $\{2\}$ 9. $\emptyset$ 10. $\{3\}$

Вариант 2

1. $\{\frac{1}{18}\}$ 2. $\{-4; 3\}$ 3. $\{-\frac{18}{31}\}$ 4. $\{-1\}$ 5. $[-8; -3]$
 6. $\{-1\}$ 7. $\{2\}$ 8. $\{-2\}$ 9. $\emptyset$ 10. $\{-3\}$

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $(-2; 0) \cup (1; 3)$ 2. $[-1, 2; -1]$ 3. $(\frac{7}{9}; \infty)$ 4. $[\frac{1}{5}; \frac{1}{4}] \cup \{\frac{2}{5}\}$
 5. $[0, 5; 1)$ 6. $(-\frac{1}{2}; 1] \cup \{-3\}$ 7. $[1; \infty)$
 8. $(-\infty; -20, 5] \cup (2; \infty)$ 9. $[-4; 1]$ 10. $[\frac{2}{3}; \frac{9+\sqrt{37}}{2}]$

Вариант 2

1. $(0; 2) \cup (-3; -1)$ 2. $(1; 1, 2]$ 3. $(-\infty; -\frac{7}{9})$
 4. $(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{5}] \cup \{-\frac{2}{5}\}$ 5. $(-1; -0, 5]$ 6. $[-1; \frac{1}{2}] \cup \{3\}$
 7. $(-\infty; -1]$ 8. $(-\infty; -2) \cup [20, 5; \infty)$ 9. $[-1; 4]$
 10. $[-\frac{9+\sqrt{37}}{2}; -\frac{2}{3}]$

Самостоятельная работа 4**Вариант 1**

1. $(-7; 9]$ 2. $[0,5; 1)$ 3. $[-1; 0] \cup [1; 2]$
4. $[1; 5) \cup (10; \infty)$ 5. $(-\infty; -2] \cup [1; \infty)$ 6. $[-4; \infty)$
7. $\{3\}$ 8. $[0; 4)$ 9. $[0; 1]$ 10. $[-2; -1,5)$

Вариант 2

1. $[-9; 7)$ 2. $(-1; -0,5]$ 3. $[-2; -1] \cup [0; 1]$
4. $[0,2; 1) \cup (2; \infty)$ 5. $[-\infty; -1] \cup [2; \infty]$ 6. $(-\infty; 2]$
7. $\{-3\}$ 8. $[0; 2)$ 9. $[-1; 0]$ 10. $(1,5; 2]$

Самостоятельная работа 5**Вариант 1**

1. $[-2; 0] \cup \{6\}$ 2. $[-\frac{1}{3}; 3]$ 3. $[-4; 7] \cup \{13\}$
4. $[-4; -1,8]$ 5. $(-\infty; -17 + \sqrt{247}]$ 6. $\{5\}$
7. $(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; 0)$ 8. $\emptyset$ 9. $(\frac{9-\sqrt{69}}{2}; 1]$
10. $[3; \frac{1+\sqrt{37}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{37}}{2}; 7]$

Вариант 1

1. $[0; 2] \cup \{-6\}$ 2. $[-3; \frac{1}{3}]$ 3. $[-7; 4] \cup \{-13\}$
4. $[1,8; 4]$ 5. $(17 - \sqrt{247}; \infty]$ 6. $\{2,5\}$
7. $(0; \frac{5-\sqrt{13}}{2})$ 8. $\emptyset$ 9. $(9 - \sqrt{69}; 2]$
10. $[6; 1 + \sqrt{37}) \cup (1 + \sqrt{37}; 14]$

Содержание

Программа элективного курса	4
1. Иррациональные уравнения	5
Введение	5
Примеры решения простейших иррациональных уравнений	5
Практикум 1	5
Тренировочная работа 1	13
Примеры решения более сложных иррациональных уравнений	20
Практикум 2	20
Тренировочная работа 2	33
Самостоятельная работа 1	45
Примеры нестандартных способов решения иррациональных уравнений	46
Практикум 3	46
Тренировочная работа 3	61
Самостоятельная работа 2	77
2. Иррациональные неравенства	78
Основные свойства	78
Примеры решения иррациональных неравенств	79
Практикум 4	79
Тренировочная работа 4	87
Самостоятельная работа 3	94
Примеры решения более сложных иррациональных неравенств	95
Практикум 5	95
Тренировочная работа 5	108
Самостоятельная работа 4	130
3. Системы иррациональных неравенств	131
Практикум 6	131
Тренировочная работа 6	140
Самостоятельная работа 5	149
4. Тренировочные карточки	151
Решение карточки 1	153
Решение карточки 2	157
Решение карточки 3	162

Решение карточки 4	166
Решение карточки 5	169
Решение карточки 6	174
5. Зачетные карточки.	177
Решение карточки 1	180
Решение карточки 2	184
Решение карточки 3	188
Решение карточки 4	191
Решение карточки 5	195
Решение карточки 6	198
Решение карточки 7	204
Решение карточки 8	208
Ответы к самостоятельным работам	211

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Научный редактор серии *А.В. Семенов*

Художник *Ю.Н. Куликов*

Компьютерная верстка *С. П. Широкий*

Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.Б. Смирнов*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.

Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.

E-mail: biblio@mcsme.ru; www.mcsme.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»

В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,

В Москве (филиал): (495) 488-3005.

E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»

193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.

Тел.: (812) 943-8076; факс: (812) 560-0598.

E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 15.08.2011 г. Формат 60х90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 13,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № 340.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.